$\boxed{\text{Triplets } (\gamma_0; \gamma, \delta) \text{ de Kottwitz}}$

Objectif

Stabilisation de la partie géométrique de la formule des traces

Problème de type PEL A ou C : $B, \iota_B, *, F, F_0, V,$
G, G_1, E comme précédemment

$\rightsquigarrow Sh_{K^p}$ q-projective lisse sur $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$

et $Sh_{K^p}(\mathbb{C}) = \coprod_{i \in Ш} G^{(i)}(\mathbb{Q}) \backslash (G(\mathbb{A}_f)/K \times \underbrace{X}_{G(\mathbb{R})\text{-classes de conj. d'un } h : \mathbb{C}^\times \to G_{\mathbb{R}}})$

On veut regarder : $tr(f \times \Phi_{\mathfrak{p}}^j \mid W_\lambda)$ où :

- $W_\lambda = \bigoplus_{i=0}^{2\dim Sh_{K^p}} (-1)^i \underbrace{IH^i}_{\text{cohom. d'intersect.}}(\overline{Sh_{K^p}(\mathbb{C})}, \underbrace{\mathcal{F}_\xi}_{G\text{-repr de dim} < \infty \text{ sur } L}) \otimes \underbrace{L_\lambda}_{\text{place de } L}$

  compact. de Baily-Borel-Satake

- $f \in \mathcal{H}_L(G(\mathbb{A}_f), K)$ alg. de Hecke
- $\Phi_{\mathfrak{p}}$ Frobenius géométrique de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p / E_{\mathfrak{p}})$, $j \geq 1$

On tombe sur : $\underbrace{\tau(G)}_{\text{Tamagawa}} \sum_{\gamma_0} \sum_{\kappa} \sum_{(\gamma, \delta)/\sim} \langle \alpha(\gamma_0; \gamma, \delta), \kappa \rangle \, e(\gamma, \delta)$

$O_\gamma(f_c^p) \, TO_\gamma(\phi_j) \, tr(\xi_{\mathbb{C}}(\gamma_0)) \, vol(\text{qqch})$

But : définir les indices de ces sommations

Transferts locaux de tores

F corps, G/F réductif (connexe), H forme intérieure de G

soit $\psi : H \to G$ associée (qui donne un isom sur $\overline{F}$)

Rq : Si H est quasi-déployé, alors en fixant un isom. $Gal(F^s/F)$-équivariant des duaux connexes $\hat{G} \to \hat{H}$ on obtient un $\psi : H \to G$ bien défini à conjugaison par un élément de G près (car le diag. de Dynkin absolu est préservé)

T/F tore maximal de H, S/F tore de G

Déf : Un plongement $i : T \to G$ défini sur F est dit admissible (par rapport à ψ) s'il est de la forme $Int\, g \circ \psi|_T$ pour un $g \in G$.

Déf : On dit que S se transfère à H s'il existe un tore maximal T' de H et un plongement admiss. $i : T' \to G$ contenant S dans son image.

Lem 1 : Si ψ correspond à $\alpha \in H^1(F, G^{ad})$, alors S se transfère à H si et seulement si α est dans l'image de $H^1(F,S) \to H^1(F,G) \to H^1(F, G^{ad})$.

Démo :
L'antécédent correspond à $[\psi|_S]$.

Prop 2 : F corps parfait, S/F tore maximal de G, H forme intérieure quasi déployée de G. Alors S se transfère à H.

Démo :
Steinberg $\rightsquigarrow \exists\, T'/F$ tore de H tq α correspondant à ψ soit dans l'image de $H^1(F,T') \to H^1(F,H)$

quitte à conjuguer par $G(F^s)$, on suppose $T' \subseteq S$

puis
$$\begin{tikzcd} H^1(F,T') \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^1(F,H) = H^1(F,G) \\ & H^1(F,S) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Prop 3 : $F = \mathbb{R}$, S/F anisotrope de G. Alors S se transfère à toute forme intérieure de G.

Idée :
on définit un ordre $\precsim$ sur les $G(\mathbb{R})$-classes de conj. de tores qui est compatible avec le nombre de racines réelles (ie α tq $\alpha(h) \in \mathbb{R}\ \forall h \in \mathfrak{t}$)
un tore anisotrope ne possède pas de racine réelle et, par rec. sur le nb de racines réelles, on montre que tout ψ envoie un $\precsim$-segment initial sur un $\precsim$-segment initial

Cas non ramifié

F corps local non Archimédien, $\mathcal{O}_F$

G, H, T supposés non ramifiés sur F, T maximal

x_0 point hyperspécial de G $\longleftrightarrow$ $K = \mathrm{Stab}_{G(F)}\, x_0$

<u>Lem 4</u> : $i_1, i_2 : T \to G$ deux plongements admiss $/F$ qui sont définis sur $\mathcal{O}_F$. Alors i_1 et i_2 sont conjugués par un élément de K.

<u>Demo</u> :

$\{g \in G \mid \mathrm{Int}\, g \circ i_1 = i_2\}$ F-torseur sur T (car T maximal) et $H^1(L, T) = \{1\}$ si $\underbrace{L/F}_{\text{non ram.}}$ déploie T

$\rightsquigarrow \exists\, g \in G(L)$ tq $\mathrm{Int}\, g \circ i_1 = i_2$

$x_0, g^{-1} x_0 \in i_1(T)$ $\hat{m}$ appartement

$\rightsquigarrow$ on ~~peut~~ supposer $g \in G(\mathcal{O}_L)$ (car $\mathrm{Int}\, T = \{1\}$)

et $\gamma \mapsto g^{-1}\gamma(g)$ 1-cocycle de $\mathrm{Gal}(L/F)$ dans $G(\mathcal{O}_L) \cap T(L) = T(\mathcal{O}_L)$

dévissage $\rightsquigarrow H^1(L/F, T(\mathcal{O}_L)) = \{1\}$

$\rightsquigarrow \exists\, t \in T(\mathcal{O}_L)$ $t^{-1}\gamma(t) = g^{-1}\gamma(g)$ $\forall \gamma$

Alors $g t^{-1} \in G(\mathcal{O}_F)$ conjugue i_1 et i_2

Transferts globaux de tores

F corps de nb, G, H, T, $i : T \to G$ admissible $/F$

$\rightsquigarrow G_v$ non ramifié $\forall v$ presque partout

alors $i \rightsquigarrow i(v) : T_v \to G_v$ définis sur $\mathcal{O}_{F_v}$ $\forall v$ p.p.

<u>Hyp</u> : $i(v) : T_v \to G_v$ définis sur $\mathcal{O}_{F_v}$ $\forall v$ p.p.

<u>Qu</u> : Quelle est l'obstruction pour qu'une telle famille $(i(v))_v$ provienne d'un $i : T \to G$?

$\mathcal{F}_0 := \{(i, g) \mid$ $i : T_{\bar F} \to G_{\bar F}$ plongem. admiss. $/F$
$g = (g_w) \in G^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})$
$i_w = (\mathrm{Int}\, g_w) \circ i(v)_w$ $\forall w | v \}$

$\underbrace{G^{sc}(\bar F)}$ ↻ $\mathcal{F}_0$ ↺ $\underbrace{T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})}$

via $x.(i, g) = (\mathrm{Int}\, x \circ i, xg)$ $\qquad$ via $(i,g).t = (i, i(t^{-1})g)$

actions qui commutent et sont compatibles à $\mathrm{Gal}(\bar F/F)$

$\mathcal{F} := G^{sc}(\bar F) \backslash \mathcal{F}_0$ F-torseur sur $T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}) / T^{sc}(\bar F)$

<u>Lem 5</u> : On a équivalence entre :

(i) $\exists\, i : T \to G$ plongem. admiss $/F$ tq (i_v) et $(i(v))$ sont conjugués sous $G^{sc}(\mathbb{A}_F)$;

(ii) $\mathcal{F}_0^{\mathrm{Gal}(\bar F/F)} \neq \emptyset$;

(iii) $\mathcal{F}$ est le torseur trivial.

<u>Demo</u> ((iii) $\Rightarrow$ (ii)) :

$\underset{\sim}{\mathcal{F}_1}$ fibre par $\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}$ d'un point de $\mathcal{F}^{\mathrm{Gal}(\bar F/F)}$

F-torseur de $G^{sc}(\bar F)$

par définition, $\mathcal{F}_1$ est localement trivial

ppe de Hasse pour G^{sc} $\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}_1$ torseur trivial : ok

$1 \to Z(\hat G) \to \hat T \to \hat T / Z(\hat G) \to 1$ induit

$\cdots \to \pi_0(\hat T^{\mathrm{Gal}(\bar F/F)}) \to \pi_0((\hat T / Z(\hat G))^{\mathrm{Gal}(\bar F/F)}) \xrightarrow{?} H^1(F, Z(\hat G)) \to \cdots$

<u>Def</u> : $\mathfrak{R}(T/F) := \{x \in \pi_0((\hat T / Z(\hat G))^{\mathrm{Gal}(\bar F/F)}) \mid ?(x) \in \text{Ш}^1(F, Z(\hat G))\}$

$\mathcal{F} \leftrightarrow c_{\mathcal{F}} \in H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}) / T^{sc}(\bar F)) \underset{\text{Tate-Nakayama}}{\xrightarrow{\sim}} H^1(F, X^\bullet(T^{sc}))^D$

$\xrightarrow{\sim} H^1(F, X_\bullet(\hat{T}^{sc}))^D \underset{\text{appl. Kottwitz}}{\xrightarrow{\sim}} \pi_0((\hat T^{sc})^{\mathrm{Gal}(\bar F/F)})^D$

$\simeq \mathfrak{R}(T^{sc}/F)^D$ car $Z(\widehat{G^{sc}}) = 1$

enfin on a : $\mathfrak{R}(T^{sc}/F)^D \to \underbrace{\mathfrak{R}(T/F)^D}_{\text{on voit } c_{\mathcal{F}} \text{ ici}}$ induit par $\mathfrak{R}(T/F) \subseteq \mathfrak{R}(T^{sc}/F)$

$(i(v))_v$ donne $T(\mathbb{A}_{\bar F}) \to G(\mathbb{A}_{\bar F})$ et $T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}) \to G^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})$

$\rightsquigarrow$ induit $H^1 i : H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) \to H^1(F, G^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}))$

Soient $d \in \mathrm{Ker}\, H^1 i$, $\bar d$ son image dans $H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}) / T^{sc}(\bar F))$.

par déf, $\exists\, x = (x_w) \in G(\mathbb{A}_{\bar F})$ tq $H^1 i(d) = (\gamma \mapsto x^{-1}\gamma(x))$

Définissons $\underset{\sim}{j(v)} = (\mathrm{Int}\, x_w) \circ i(v)$ indépendant de $w|v$

$G(\mathbb{A}_F)$-classe de conj. indépendante de x

et définie sur $\mathcal{O}_{F_v}$ $\forall v$ p.p.

<u>Lem 6</u> : L'élément $c_j \in H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})/T^{sc}(\bar F))$ correspondant à $\mathcal{F}_j$ construit à partir de $(j(v))_v$ est $c_j = \bar\partial + c_{\mathcal{F}}$.

<u>Demo</u> :

Soit $(i, g) \in \mathcal{F}$ (construit pour $(i(v))_v$)

$i : T \to G$ s'étend en $i : H \xrightarrow{\sim} G$ sur $\bar F$ (conj. à ψ)

$i^{-1} \circ \gamma(i) = \mathrm{Int}\, h(\gamma)$ pour un $h(\gamma) \in H(\bar F)$ $\forall \gamma \in \mathrm{Gal}(\bar F|F)$,

alors $(\gamma \mapsto i^{-1}(g\gamma(g^{-1}))\, h(\gamma)) \in H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})/T^{sc}(\bar F))$ est $c_{\mathcal{F}}$; puis $\hat{m}$ calcul pour c_j $\rightsquigarrow$ ok

On rappelle $H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})/T^{sc}(\bar F)) \simeq \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D$.

$\mathcal{I}_1 := \mathrm{Ker}(\mathcal{R}(T^{sc}/F)^D \longrightarrow \mathcal{R}(T/F)^D)$

$\mathcal{I}_2 := \{x \in H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) \mid \bar x = 0 \in H^1(F, T(\mathbb{A}_{\bar F})),\ H^1 i(x) = 0 \in H^1(F, G^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}))\}$

$\mathcal{I}_3 := \mathrm{Im}(\mathcal{I}_2 \longrightarrow \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D)$

<u>Lem 7</u> : On a $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_3$.

<u>Demo</u> :

z-extensions $\rightsquigarrow$ on suppose $G^{der} = G^{sc}$ simpl. connexe

$\mathcal{I}_4 := \mathrm{Ker}(H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) \longrightarrow H^1(F, T(\mathbb{A}_{\bar F})))$

$\mathcal{I}_5 := \mathrm{Im}(\mathcal{I}_4 \to \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D)$

on a $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}_4$ et donc $\mathcal{I}_3 \subseteq \mathcal{I}_5$

$1 \to T^{der} = T^{sc} \to T \to D \to 1$ induit

$$
\begin{array}{ccccc}
D(\mathbb{A}_F) & \longrightarrow & H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) & \longrightarrow & H^1(F, T(\mathbb{A}_{\bar F})) \\
y & \longmapsto & x & \longmapsto & 1 \\
\| & & \downarrow & & \\
y & \longmapsto & z & & \\
D(\mathbb{A}_F) & \longrightarrow & H^1(F, G^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) & &
\end{array}
$$

Kneser $\rightsquigarrow H^1(F_v, G^{sc}) = \{1\}$: d'où $z_v = 0$ $\forall v \nmid \infty$

$D(F)$ dense dans $D(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ quitte à changer x par un élément de $D(F) \to H^1(F, T^{sc})$, on peut supposer $y_v = 0$ $\forall v | \infty$ $\rightsquigarrow z_v = 0$ $\forall v|\infty$

donc $\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_5$

$$
\begin{array}{ccc}
H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})/T^{sc}(\bar F)) \\
\downarrow \beta & & \\
H^1(F, T(\mathbb{A}_{\bar F})) & &
\end{array}
$$

se dualise en :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}(T^{sc}/F) & \xrightarrow{\alpha^D} & \prod_v \pi_0\big((\widehat{T^{sc}})^{\mathrm{Gal}(\bar F_v|F_v)}\big) \\
 & & \uparrow \beta^D \\
 & & \prod_v \pi_0\big(\hat{T}^{\mathrm{Gal}(\bar F_v|F_v)}\big)
\end{array}
$$

par def, $\mathcal{R}(T|F) = \mathrm{Ker}(\mathcal{R}(T^{sc}/F) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, \beta^D)$

$\rightsquigarrow \mathcal{R}(T/F)^D = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, \beta \longrightarrow \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D)$

d'où $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_5$ $\rightsquigarrow$ ok

$1 \to T^{sc}(\bar F) \to T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}) \to T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})/T^{sc}(\bar F) \to 1$

donne $H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})/T^{sc}(\bar F)) \longrightarrow H^2(F, T^{sc})$

$c_{\mathcal{F}} \longmapsto c'_{\mathcal{F}}$

<u>Prop 8</u> : Supposons que T_v se transfère à H_v $\forall v$. Alors T se transfère à H ssi $c'_{\mathcal{F}} = 0 \in H^2(F, T^{sc})$.

<u>Demo</u> :

Lem 7 $\rightsquigarrow$ transfert $\Leftrightarrow \exists (j(v))_v$ tq $c_j \in \mathcal{I}_1$

$\mathcal{I}_6 := \mathrm{Ker}(H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) \to H^1(F, G^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})))$

Lem 6 $\rightsquigarrow$ transfert $\Leftrightarrow c_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Im}(\mathcal{I}_6 \to \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D)$

on a : $H^1(F, T^{sc}) \longrightarrow \prod_{v|\infty} H^1(F_v, T^{sc})$

$\rightsquigarrow \mathrm{Im}(\mathcal{I}_6 \to \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D) = \mathrm{Im}(H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) \to \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D)$

$1 \to T^{sc}(\bar F) \to T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F}) \to T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})/T^{sc}(\bar F) \to 1$

induit $\dots \to H^1(F, T^{sc}(\mathbb{A}_{\bar F})) \to \mathcal{R}(T^{sc}/F)^D \to H^2(F, T^{sc}) \to \dots$

d'où transfert $\Leftrightarrow c_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R}(T^{sc}/F)^D \to H^2(F, T^{sc}))$

Premières définitions, dont γ et δ

Retour à la situation du § "Objectif" :

$\bar{k} = \overline{\mathbb{F}_p}$, $\sigma : x \mapsto x^p$, $r \geq 1$, $k_r = \mathbb{F}_{p^r}$, $L = \widehat{\mathbb{Q}_p^{unr}}$, $L_r = \mathbb{Q}_{p^r}$

$c = p^r c_0 \in p^r \mathbb{Z}_p^\times \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$

Point fixe de $\underbrace{g}_{\text{correspondant à } g \in G(\mathbb{A}_f^p)} \times \Phi_p^j$ sur $Sh_{K^p \cap gK^pg^{-1}}(\bar{k})$

$\rightsquigarrow (A, \lambda, i)$ variété abélienne virtuelle sur k_r, c-polarisée, à isogénie première à p près, munie de $i : B \to \mathrm{End}\, A$

$\exists\, \lambda$ polarisation$/\bar{k}$ tq $\pi_A^*(\lambda) = c\lambda$

où $u : \sigma^r(A_{\bar{k}}) \to A_{\bar{k}}$ isogénie définissant $A = (A_{\bar{k}}, u)$

$\pi_A : A_{\bar{k}} \xrightarrow{\Phi_p^r} \sigma^r(A_{\bar{k}}) \xrightarrow{u} A_{\bar{k}}$

Hyp : $H_1(A_{\bar{k}}, \mathbb{A}_f^p) \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p$ en tant que B-modules antihermitiens

Prop 9 : π_A définit un point de $G(\mathbb{A}_f^p)$.

Rq : sa classe de conj. ne dépend pas de $H_1(A_{\bar{k}}, \mathbb{A}_f^p) \simeq V \otimes \mathbb{A}_f^p$

Demo :

pour $\ell \neq p$, on a : $H_1(A_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \times H_1(A_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell(1)$

et $(\pi_A v, \pi_A w) = c(v,w) \rightsquigarrow \pi_A \in G(\mathbb{A}_f^p)$

Def : $\gamma = \pi_A^{-1} \in G(\mathbb{A}_f^p)$

$\bar{\Lambda} := \hat{H}_{cris}(A_{\bar{k}}, \mathcal{O}_L)^\vee$, $\bar{H} := \bar{\Lambda} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$

$\rightsquigarrow u : \bar{\Lambda} \to \bar{\Lambda}$ σ^{-r}-linéaire

$\Lambda := \{x \in \bar{\Lambda} \,/\, u(x) = x\}$, $H := \{x \in \bar{H} \,/\, u(x) = x\}$

$\Phi : \bar{\Lambda} \to \bar{\Lambda}$ Frobenius σ-linéaire

$$\rightsquigarrow \Phi : \begin{array}{ccc} \bar{H} & \longrightarrow & \bar{H} \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ H & \longrightarrow & H \end{array}$$

Hyp : $H \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}} L_r$ en tant que B-modules antihermitiens.

Prop 10 : Φ induit un isomorphisme σ-linéaire $V \otimes_{\mathbb{Q}} L_r \to V \otimes_{\mathbb{Q}} L_r$ et on a : $\Phi = \delta \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma)$ avec $\delta : V \otimes_{\mathbb{Q}} L_r \to V \otimes_{\mathbb{Q}} L_r$ linéaire.

Demo :

H B-module antihermitien sur L_r pour lequel $(\Phi v, \Phi w) = c' \sigma(v,w)$ où $c' \in L_r^\times$, $N_{L_r/\mathbb{Q}_p} c' = c^{-1}$.

par hyp, $\Phi : V \otimes L_r \to V \otimes L_r$ σ-linéaire et $\Phi \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma)^{-1}$ est linéaire

Def : $\delta \in G(L_r)$ comme dans la Prop 10

Rq : changer $H \simeq V \otimes L_r$ remplace δ par $x \delta \sigma(x^{-1})$ pour un $x \in G(L_r) \rightsquigarrow \{\delta\}_\sigma \in B(G_{\mathbb{Q}_p}) := H^1(\langle\sigma\rangle, G(L))$

$h \in X \rightsquigarrow \mu_h : \mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{C}}$

$\rightsquigarrow G(\bar{\mathbb{Q}})$-classe de conj. de $\mu_0 : \mathbb{G}_m \to G_{\bar{\mathbb{Q}}}$

soient $\hat{T}$ tore max. de $\hat{G}$, W grp de Weyl associé

dual de $\mu_0 \rightsquigarrow W$-orbite de $\mu^\bullet \in X^\bullet(\hat{T})$

Def : $\mu_1 :=$ restriction de $\mu^\bullet$ à $Z(\hat{G})$

Hyp : L'image de $\{\delta\}_\sigma$ par $B(G_{\mathbb{Q}_p}) \to X^\bullet(Z(\hat{G})^{Gal(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)})$ coïncide avec $-\mu_1$.

Rq : Pour un point spécial, c'est imposé par la formule de Shimura-Taniyama.

Des algèbres semisimples

$M := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} A$ $\mathbb{Q}$-alg. semisimple

$\lambda \rightsquigarrow$ Rosati $i_\lambda : g \mapsto \lambda^{-1} \hat{g} \lambda$ préservant M et cela induit une involution positive $*$ sur M

$I_{/\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(A, \lambda, i) \rightsquigarrow I(R) = \{x \in M_R \,/\, x x^* \in R^\times\}$

$I_1(R) := \{x \in M_R \,/\, x x^* = 1\}$

$*$ positive $\rightsquigarrow (I_1)_{\mathbb{R}}$ anisotrope

Lem 11 : $(I_1)_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est un produit de GL et de Sp.

Demo :

Honda-Tate $\rightsquigarrow$ $\forall \ell \neq p$ $I_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq G_{\gamma_\ell} := \mathrm{Cent}_{G_{\mathbb{Q}_\ell}} \gamma_\ell$

π_A central dans M $\rightsquigarrow$ γ_ℓ semisimple

enfin, on a supposé PEL de type A ou C $\rightsquigarrow$ ok

Soit T tore max de I

$N := \mathrm{Cent}_M T \subseteq M$ ss-alg ssimple comm. maximale

$C := \mathrm{End}_B V$ $\mathbb{Q}$-alg simple, F centre de B

Lem 12 : $\dim_F N = (\dim_F C)^{1/2}$.

Demo :

$I_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq G_{\gamma_\ell}$ $\rightsquigarrow$ $\dim T = \mathrm{rang}\, G$, et N a même $\dim_F$ que les ss-alg. ssimple comm. max. de C

Lem 13 : Il existe un homom. injectif $N \hookrightarrow C$ de F-alg. ssi $N \otimes_F C \simeq M_d(N)$ pour un certain d. Dans ce cas, deux tels plongements sont $C^\times$-conjugués.

Idée :

$N \to C$ $\longleftrightarrow$ structure de $C \otimes_F N$-module sur C

puis on regarde les dim. des modules simples $C \otimes_F N_i$

où $N = N_1 \times \cdots \times N_t$ avec N_i/F ext. de corps

Prop 14 : Dans notre $\underbrace{\text{situation}}_{\text{type A seulement}}$, $\exists\, N \hookrightarrow C$ de F-alg.

Demo :

Lem 13 $\rightsquigarrow$ il suffit de voir $C \otimes_F N \simeq M_d(N)$ localem. $/\mathcal{O}_F$

$\forall \ell \neq p$, $H_1(A_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq V \otimes \mathbb{Q}_\ell$ de B-mod. antiherm.

Honda-Tate $\rightsquigarrow$ $M \otimes \mathbb{Q}_\ell \hookrightarrow C \otimes \mathbb{Q}_\ell$ de $F \otimes \mathbb{Q}_\ell$-alg.

$\mathfrak{P}|p$: par hyp, $B \otimes \mathbb{Q}_p = \prod M_d(F_{\mathfrak{P}})$ avec $F_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p$ non ram.

$v|\infty$: toute place est complexe.

Prop 15 : $\exists\, N \hookrightarrow C$ de F-alg. compatible avec $*$.

Demo :

Prop 14 $\rightsquigarrow$ $i : N \hookrightarrow C$ de F-alg.

on veut : l'un des conjugués de i est compatible avec $*$,

ie on cherche une $C \otimes_F N$-forme hermitienne $(\,,\,)$ sur C qui soit équivalente en tant que C-forme à $(x,y)_1 := \mathrm{tr}_{C/F}(x y^*)$.

$\forall \ell \neq p$, $N \otimes \mathbb{Q}_\ell \subseteq M \otimes \mathbb{Q}_\ell \hookrightarrow C \otimes \mathbb{Q}_\ell$ de la Prop 14

est compatible avec $*$

$\rightsquigarrow$ $\exists\, (\,,\,)'$ $C \otimes N$-forme hermit. non dégénérée sur C

$G_0/F_0 := \mathrm{Aut}_C(C, (\,,\,)')$ $\rightsquigarrow$ $G_0(R) = \{x \in C \otimes_{F_0} R \,/\, x x^* = 1\}$

$T_0/F_0 := \mathrm{Aut}_{C \otimes N}(C, (\,,\,)')$

$\mathrm{End}_{C \otimes N} C = N$ $\rightsquigarrow$ $T_0(R) = \{x \in N \otimes_{F_0} R \,/\, x x^* = 1\}$

La différence entre $(\,,\,)'$ et $(\,,\,)_1$ en tant que C-formes hermitiennes est un $\alpha \in H^1(F_0, G_0)$

on veut : un antécédent à α par $H^1(F_0, T_0) \to H^1(F_0, G_0)$,

ou autrement dit savoir si T_0 se transfère à G_α (forme intérieure de G associée à α)

$\forall v \nmid p, \infty$: $T_{0,v}$ se transfère à $G_{\alpha,v}$

$v|p$ par Prop 2, $v|\infty$ par Prop 3

Prop 8 $\rightsquigarrow$ l'obstruction au transfert global est dans $H^2(F_0, \underbrace{T_0^{\mathrm{der}}}_{\text{simpl. connexe (car type A ou C)}})$, et même $Ш^2(F_0, T_0^{\mathrm{der}})$

Tate-Nakayama $\rightsquigarrow$ $Ш^2(F_0, T_0^{\mathrm{der}})^D = Ш^1(F_0, X^*(T_0^{\mathrm{der}}))$

$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(\pi_0\left((\widehat{T_0^{\mathrm{der}}})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F_0)}\right) \to \prod_v \pi_0\left((\widehat{T_0^{\mathrm{der}}})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_{0,v})}\right)\right)$

on cherche donc v tq $X^*(T_0^{\mathrm{der}})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_{0,v})} = X^*(T_0^{\mathrm{der}})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F_0)}$

$T_{0,v}$ anisotrope si $v|\infty$ $\rightsquigarrow$ ok

Définition de γ_0 et propriétés de $(\gamma_0; \gamma, \delta)$

Prop 16 : π_A^{-1} définit un élément de $G(\mathbb{Q})$.

Demo :

$\pi_A \in Z(M) \subseteq N \subseteq M$ + c-polarisée $\rightsquigarrow \pi_A \in T(\mathbb{Q})$

Prop 15 $\rightsquigarrow$ $i : N \hookrightarrow C$ compatible à $*$

alors $i(\pi_A^{-1}) \in G(\mathbb{Q})$

<u>Def</u> : $\gamma_0 := \pi_A^{-1} \in G(\mathbb{Q})$.

<u>Rq</u> : deux éventuels i étant $G(\overline{\mathbb{Q}})$-conjugués, la classe de conj. stable de γ_0 est uniquement déterminée

<u>Rq</u> : π du début sera dans $\mathcal{R}(G_{\gamma_0}/\mathbb{Q})$

<u>Prop 17</u> : (i) γ_0 est semisimple et contenu dans un tore maximal, elliptique de $G_{\mathbb{R}}$

(ii) $\forall \ell \neq p$, γ_0 et γ_ℓ sont conjugués sous $G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

(iii) γ_0 et $N\delta := \delta\sigma(\delta) \cdots \sigma^{r-1}(\delta)$ sont conjugués sous $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

<u>Demo</u> (du (iii)) :

$\Phi^r = \pi_A^{-1}$ sur H $\rightsquigarrow$ $N\delta$ et γ_0 sont conjugués sous $(C \otimes_{\mathbb{Q}} L_r)^\times (\overline{L_r})$

de plus γ_0 et $N\delta$ ont $\hat{m}$ image c^{-1} par $G \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$\rightsquigarrow$ γ_0 et $N\delta$ conjugués sous $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

<u>Refs</u> :

Kottwitz, Shimura varieties and λ-adic representations

Kottwitz, Stable trace formula : cuspidal tempered terms

Kottwitz, Points on some simple Shimura varieties over finite fields

Shelstad, characters and inner forms of a quasisplit group over $\mathbb{R}$

Steinberg, Regular elements of semisimple groups