Points complexes des problèmes de modules de type PEL

Rappel des objets

$Sh^{\mathbb{C}}_{K^p}(G,X) = G(\mathbb{Q}) \backslash (G(\mathbb{A}_f)/K \times \underbrace{X}_{})$

$\underbrace{\mathbb{S}(\mathbb{R})}_{} = \mathbb{C}^\times$

$G(\mathbb{R})$-classes de conj. de $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ tq :

- si $h \in X$, les seuls poids de $\mathbb{S} \curvearrowright (\mathrm{Lie}\, G)_{\mathbb{C}}$ sont $\bar{z}/z$, 1 et $z/\bar{z}$
- $\mathrm{ad}\, h(i)$ est une involution de Cartan pour G
- G n'a pas de facteur H défini sur $\mathbb{Q}$ avec $H(\mathbb{R})$ compact

$\underbrace{Sh^{\mathbb{C}}_{K^p}(G,X)}_{} = \coprod_{g \in \mathcal{E}} \left(gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{ad}^{-1}(\underbrace{G^{ad}(\mathbb{R})^{\circ}}_{})\right) \backslash \underbrace{X^{\circ}}_{}$

compo. conn. du neutre

compo connexe

où $\mathcal{E}$ ens. fini, $K = K_p K^p$

variété q-projective définie sur E corps réflexe

Sh_{K^p} schéma q.projectif sur $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ dont les points sur $\mathbb{C}$ sont les classes d'isom. de $(A, \lambda, \iota, \eta K^p)$ où :

- A var. ab. sur $\mathbb{C}$ à isogénie première à p près
- $\lambda : A \to A^\vee$ polarisation première à p
- $\iota : \underbrace{\mathcal{O}_B}_{} \to \mathrm{End}\, A$ respectant $*$ et Rosati

  alg. simple sur $\mathbb{Q}$ de centre F tq $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est produit d'alg. de matrices sur des $F_p/\mathbb{Q}_p$ non ram., munie d'une involution positive $*$ conservant $\mathcal{O}_B$

  $F_0 :=$ sous-corps de F fixe par $*$
- ηK^p K^p-orbite d'isom. $\eta : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p \xrightarrow{\sim} H_1(A, \mathbb{A}_f^p)$ de B-modules antihermitiens

  $\mathbb{Q}$-ev avec action de B, muni d'une forme alternée $(\,,\,)$ non dégénérée tq $\forall v, w \in V$, $\forall b \in B$ $(bv, w) = (v, b^* w)$

vérifiant la condition de déterminant de Kottwitz (définie sur $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$) et $V \otimes \mathbb{Q}_p \supseteq \Lambda$ réseau autodual

$C := \mathrm{End}_B V$

$G/\mathbb{Q}$, $G(R) := \{x \in C \otimes_{\mathbb{Q}} R \,/\, xx^* \in R^\times\}$

$G_1/\mathbb{Q}$, $G_1(R) := \{x \in C \otimes_{\mathbb{Q}} R \,/\, xx^* = 1\}$

Bijection $Sh_{K^p}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} Sh^{\mathbb{C}}_{K^p}(G,X)$, ou presque

<u>Prop 1</u> : Supposons que si V, V' sont deux modules antihermitiens avec $V \otimes \mathbb{Q}_v \simeq V' \otimes \mathbb{Q}_v$ $\forall v$ (y compris $v | \infty$) alors V et V' sont isomorphes.

L'application $Sh_{K^p}(\mathbb{C}) \longrightarrow Sh^{\mathbb{C}}_{K^p}(G,X)$

$(A, \lambda, \iota, \eta K^p)/\sim \;\longmapsto [(\eta K^p, \eta_p), \underbrace{h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}}_{}]$

est bien définie.

provient de $\mathbb{C}^* \curvearrowright H_1(A, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbb{R}$

<u>Rq</u> : h vu comme $\mathbb{C} \to C \otimes \mathbb{R}$ est un homom. de $\mathbb{R}$-algèbres. Aussi $h(i)$ donne la $\mathbb{C}$-structure de $V \otimes \mathbb{R}$, et donc $h(i)h(i)^* = 1$; et $h(i)h(-i) = 1$ donc $h(i)^* = h(\bar{i})$.

<u>Lem 2</u> : (i) Les seuls poids de $\mathbb{S} \underset{h_{\mathbb{C}}}{\curvearrowright} (\mathrm{Lie}\, G)_{\mathbb{C}}$ sont $\bar{z}/z$, 1 et $z/\bar{z}$.

(ii) $\{x \in C \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \,/\, xx^* = 1,\ \bar{x} h(i) x^* = h(i)\}$ est un sous-groupe compact de $G_1(\mathbb{C})$.

<u>Demo</u> :

Comme $\mathbb{C} \xrightarrow{h} C \otimes \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$-alg, les caractères intervenant dans $\mathbb{C}^\times \to G(\mathbb{R})$ ne peuvent être que z ou $\bar{z}$ et $\mathbb{S} \curvearrowright (\mathrm{Lie}\, G)_{\mathbb{C}}$ provient de $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\text{"id"}} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}} G_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathrm{Lie}\, G)_{\mathbb{C}}$.

$\{x \in C \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \,/\, xx^* = 1,\ \bar{x} h(i) x^* = h(i)\}$

$\leq \{x \in C \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \,/\, x \underbrace{x^t}_{} = 1\}$ où $(y \otimes c)^t = h(i)^{-1} y^* h(i) \otimes \bar{c}$

involution positive

$\rightsquigarrow$ ss-grp fermé d'un groupe orthogonal.

<u>Lem 3</u> : $(B_{\mathbb{R}}, *, V, (\,,\,), \underbrace{h}_{})$ comme avant

$\mathbb{C} \to C_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$-alg. avec $\left| \begin{array}{l} h(\bar{z}) = h(z)^* \\ (\cdot, h(i)\cdot) > 0 \end{array} \right.$

(i) Soient $(\,,\,)'$ et h' des structures avec des conditions similaires et tq les structures sur V

de module sur $B_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ données par h et h' sont isomorphes. Alors $(V, (\,,), h)$ et $(V, (\,,)', h')$ sont isomorphes en tant qu'espaces antihermitiens avec action de $B_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

(ii) $\underset{\sim}{X} = G(\mathbb{R})$-classes de conj. de h classifie les $h' : \mathbb{C} \to C_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$-alg. respectant $*$ et tq : (a) $(\cdot, h'(i)\cdot)$ est défini >0 ou <0 ;
(b) les structures de module sur $B \otimes \mathbb{C}$ pour V données par h et h' sont isomorphes.

<u>Idée</u> : L'espace des formes hermitiennes sur un B-module irréductible V est de dim 1 sur $\mathbb{R}$.

<u>Lem 4</u> : Pour $v \neq p$, les $B \otimes \mathbb{Q}_v$-modules antihermitiens $V \otimes \mathbb{Q}_v$ et $H_1(A, \mathbb{Q}_v)$ sont isomorphes.

<u>Demo</u> :
pour $v \neq p$ et $v \neq \infty$, c'est donné par ηK^p
$\rightsquigarrow H_1(A, \mathbb{Q}) \simeq V$ en tant que B-modules
et donc : $H_1(A, \mathbb{R}) \simeq V \otimes \mathbb{R}$ en $B \otimes \mathbb{R}$-mod.
$H_1(A, \mathbb{C}) \simeq V \otimes \mathbb{C}$ en $B \otimes \mathbb{C}$-mod.

on a : $V \otimes \mathbb{C} = \underbrace{V_1}_{} \oplus V_{-1}$, $H_1(A, \mathbb{C}) = \underbrace{H_1}_{} \oplus H_{-1}$

$\mathbb{C}^*$ agit par $\bar{z}/z$

condition de déterminant $\Rightarrow V_1 \simeq H_1$ en $B \otimes \mathbb{C}$-mod.
donc $H_1(A, \mathbb{R}) \simeq V \otimes \mathbb{R}$ en $(B \otimes \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-mod.
Lem 3 $\rightsquigarrow$ isom. antihermitiens.

<u>Lem 5</u> : Les $B \otimes \mathbb{Q}_p$-modules antihermitiens $V \otimes \mathbb{Q}_p$ et $H_1(A, \mathbb{Q}_p)$ sont isomorphes, $\Lambda \xrightarrow{\sim} H_1(A, \mathbb{Z}_p)$.

<u>Demo</u> :
$H_1(A, \mathbb{Q}) \simeq V$ sur $B \rightsquigarrow H_1(A, \mathbb{Q}_p) \simeq V \otimes \mathbb{Q}_p$ sur $B \otimes \mathbb{Q}_p$
$\Lambda_H := H_1(A, \mathbb{Z}_p)$ réseau autodual bien défini
+ (Condition Type D) $\underset{\text{justification plus tard}}{\rightsquigarrow}$ isom. antihermitien.

<u>Demo</u> (Prop 1) :
Lem 4 + Lem 5 + Hyp $\rightsquigarrow V$ et $H_1(A, \mathbb{Q})$ sont isom. en tant que modules antihermitiens sur B, et on obtient un point de $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f) / K$ avec ηK^p comme donné et $\eta_p : V \otimes \mathbb{Q}_p \to H_1(A, \mathbb{Q}_p)$

$$K_p = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)} \Lambda \qquad \Lambda \xrightarrow{\sim} H_1(A, \mathbb{Z}_p)$$

Lem 2 + Lem 3 $\rightsquigarrow$ point de X uniquement défini une fois un isom. $V \xrightarrow{\sim} H_1(A, \mathbb{Q})$ fixé
$\rightsquigarrow [(\eta K^p, \eta_p K_p), h] \in Sh^{\mathbb{C}}_{K^p}(G, X)$

<u>Prop 6</u> : Sous les hypothèses de Prop 1, l'appl. $Sh_{K^p}(\mathbb{C}) \longrightarrow Sh^{\mathbb{C}}_{K^p}(G, X)$ est une bijection.

<u>Demo</u> :
Surjectivité : var. ab. $/\mathbb{C} \rightsquigarrow (A, \lambda, \iota)$ et le respect de h donne la condition de déterminant
Injectivité : OK

<u>Cor 7</u> : On a en général : $Sh_{K^p}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \coprod_{i \in Ш} G^{(i)}(\mathbb{Q}) \backslash (G(\mathbb{A}_f)/K \times X)$
où Ш est un ensemble fini classifiant les classes d'isom. de B-modules antihermitiens local. isom. en tant qu'ensembles pointés.

<u>Rq</u> : Ш $\xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ en tant qu'ensembles pointés.

<u>Demo</u> :
pour $i \in$ Ш, $V^{(i)}$ un représentant on prend $G^{(i)}$ la forme intérieure de G qui correspond à $V^{(i)}$ (ie le stabilise) et localement on a $G^{(i)}(\mathbb{Q}_v) \simeq G(\mathbb{Q}_v)$ $\forall v$

<u>Prop 8</u> : Les $(G^{(i)}(\mathbb{Q}) \backslash (G(\mathbb{A}_f)/K \times X))_{K^p}$ pour $i \in$ Ш sont deux à deux isomorphes en tant que tours de variétés sur E, de manière compatible aux correspondances de Hecke.

<u>Rq</u> : en particulier, on pourra considérer des faisceaux ℓ-adiques sur un seul morceau

Demo :

Si $|Ш| = 1$, rien à faire

Sinon on va voir qu'on a une bijection

$Ш^1(\mathbb{Q}, Z) \xrightarrow{\sim} Ш^1(\mathbb{Q}, G)$ où Z centre de G

$\rightsquigarrow$ on peut choisir $z \in Z(\mathbb{A}_f)$ et on a :

$g(zKz^{-1} \cap G(\mathbb{Q}))g^{-1} = z(gKg^{-1})z^{-1} \cap gG(\mathbb{Q})g^{-1}$

Cohomologie galoisienne, principe de Hasse

Γ grp ~~topologique~~, M grp discret $\circlearrowleft$ G lisse

$H^0(\Gamma, M) := M^\Gamma$

$H^1(\Gamma, M) := Z^1(\Gamma, M)/\sim$ où on a posé

$\left| \begin{array}{l} Z^1(\Gamma, M) = \{c : \Gamma \to M \,/\, c(gh) = c(g)\, g(c(h)) \ \forall g,h\} \\ c_1 \sim c_2 \text{ si } \exists m \in M \quad c_1(g)\, g(m) = m\, c_2(g) \ \forall g \end{array} \right.$

Rq : On recouvre la cohom. abélienne lorsque M est un G-module (ie M abélien)

k corps, K/k galoisienne

$H^i(K/k, M) := H^i(\mathrm{Gal}(K/k), M)$

$H^i(k, M) := H^i(k^{sep}/k, M)$

Prop 9 : $H^1(K/k, \mathrm{Aut}_K((V, x) \otimes K)) \xleftrightarrow{\sim} \left\{ (V', x')/k \,\middle|\, \begin{array}{l}(V,x)\otimes K \\ \simeq (V', x') \otimes K\end{array} \right\}$ modulo isom

k-ev de dim $< \infty$; $\in T^p(V) \otimes T^q(V^*)$

via : $[c] \longmapsto (V' = \{x \in V \otimes K \,/\, c(g)\, g(x) = x \ \forall g \in \mathrm{Gal}(K/k)\},$
$x' = \phi^{-1}(x))$ où $\phi : V \otimes K \xrightarrow{\sim} V' \otimes K$

$[g \mapsto \phi^{-1} g(\phi)] \longleftarrow\!\!| \ \phi : (V, x) \otimes K \xrightarrow{\sim} (V', x') \otimes K$

Rq : $g \in \mathrm{Gal}(K/k)$ agit sur $f \in \mathrm{Aut}_K((V, x) \otimes K)$ par
$g(f) = (1 \otimes g) \circ f \circ (1 \otimes g^{-1})$.

Def : $Ш^1(k, G) := \mathrm{Ker}(H^1(k, G) \longrightarrow \prod_v H^1(k_v, G))$

Principe de Hasse : $Ш^1(k, G) = \{1\}$. (k CdN)

Thm 10 (Borel - Serre) : Soient k un corps de nb et G/k un grp algébrique linéaire. Alors $Ш^1(k, G)$ est fini.

Thm 11 (Kneser) : Soient k un corps de nb et G/k un grp classique semisimple, simplement connexe. Alors $H^1(k, G) \longrightarrow \prod_v H^1(k_v, G)$ est bijective.

Application à "notre" G

classification des $\mathbb{R}$-algèbres semisimples avec involution positive $*$ $\rightsquigarrow$ 3 types de $C \otimes \mathbb{R}$ possibles

* de 1^e espèce : $F = F_0$
  - $\to$ Type C : $C \otimes \mathbb{R} = [F_0 : \mathbb{Q}]$ copies de $M_{2n}(\mathbb{R})$
  - $\to$ Type D : $C \otimes \mathbb{R} = [F_0 : \mathbb{Q}]$ copies de $M_n(\mathbb{H})$
* de 2^{nde} espèce : F/F_0 quadratique imaginaire
  - $\to$ Type A : $C \otimes \mathbb{R} = [F_0 : \mathbb{Q}]$ copies de $M_n(\mathbb{C})$

Groupes associés

$C \rightsquigarrow G_1 = \mathrm{RES}_{F_0/\mathbb{Q}}\, G_0$ où $G_0(\overline{F_0}) = Sp(2n)$

$D \rightsquigarrow G_1 = \mathrm{RES}_{F_0/\mathbb{Q}}\, G_0$ où $G_0(\overline{F_0}) = O(2n)$

$A \rightsquigarrow G_1 = \mathrm{RES}_{F_0/\mathbb{Q}}\, U(F/F_0, n/d, \underbrace{D}_{\text{alg. à division de centre } F,\ \deg d^2})$

Rq : ces groupes proviennent de ce que, sur $\mathbb{C}$:
- conserve la forme réelle alternée = symplectique
- symplectique + conserve $\mathbb{H}$ = orthogonal
- symplectique $\cap$ complexe = unitaire

Principe de Hasse pour G ?

$A, C \rightsquigarrow G$ connexe, G^{der} semisimple, simpl. connexe

$D \rightsquigarrow 2^{[F_0 : \mathbb{Q}]}$ composantes connexes, pas de principe de Hasse

Rq : Thm 11 vrai sans le terme "classique" par Kneser, Harder et Chernousov

Def : $D := G/G^{der}$ tore

Rq : attention à $G^{der}(k) \geq G(k)^{der}$ pas tjs égalité

Lem 12 : Soient k un corps de nb et G un grp réductif connexe tq G^{der} simpl. connexe. Alors on a : $Ш^1(k, G) \xrightarrow{\sim} Ш^1(k, D)$.

Demo (Kottwitz, Sansuc) :

$G \to D$ induit $Ш^1(k,G) \xrightarrow{\beta} Ш^1(k,D)$

Injectivité : en tordant, on se ramène à prouver $\operatorname{Ker} \beta = \{1\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} \beta$

$$\begin{tikzcd} D(k) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & H^1(k,G^{der}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,G) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & H^1(k,D) \\ \prod_v D(k_v) \arrow[r] & \prod_v H^1(k_v,G^{der}) \arrow[r] & \prod_v H^1(k_v,G) & \end{tikzcd}$$

$y \mapsto x \mapsto 1$, $(d_v) \mapsto (y_v) \mapsto 1$

Kneser $\rightsquigarrow$ $D(k)$ dense dans $D(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$

donc $\exists z \in D(k)$ tq $z \mapsto d_v$ pour $v | \infty$

Kneser $\rightsquigarrow$ $H^1(k_v, G^{der}) = \{1\}$ pour $v \nmid \infty$

donc $\alpha(z)_v = y_v \quad \forall v$

ppe de Hasse pour G^{der} $\rightsquigarrow$ $z \mapsto y \mapsto x = 1$

Surjectivité : soit $x \in Ш^1(k,D)$

soit $T \leq G$ un k-tore maximal, elliptique à une place finie v (ie T_v n'est contenu dans aucun parabolique propre de G_v)

Kneser $\rightsquigarrow$ $Ш^2(k, T^{der}) = \{1\}$ où $T^{der} := T \cap G^{der}$

$1 \to T^{der} \to T \to D \to 1$ induit

$$\begin{tikzcd} H^1(k,T^{der}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,D) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k,T^{der}) \arrow[d] \\ \prod_v H^1(k_v,T^{der}) \arrow[r] & \prod_v H^1(k_v,T) \arrow[r] & \prod_v H^1(k_v,D) \arrow[r] & \prod_v H^2(k_v,T^{der}) \end{tikzcd}$$

$y \mapsto x \mapsto 1$, $(z_v) \mapsto (y_v) \mapsto \hat{1} \mapsto 1$

cohom. tores $\rightsquigarrow$ $H^1(k,T^{der}) \twoheadrightarrow \prod_{v|\infty} H^1(k_v, T^{der})$

on peut alors supposer $y_v = 1 \quad \forall v | \infty$

soit $g \in H^1(k,G)$ tq $H^1(k,T) \ni y \mapsto g$

alors $\left| \begin{array}{ll} g_v = 1 \text{ pour } v|\infty & \text{car } y_v = 1 \\ g_v = 1 \text{ pour } v \nmid \infty & \text{car } H^1(k_v, G^{der}) = \{1\} \end{array} \right.$

<u>Prop 13</u> : Dans les cas (A, n pair) et C, on a $Ш^1(\mathbb{Q},G) = \{1\}$.

<u>Demo</u> :

C $\rightsquigarrow$ on passe à k^{sep} et $G^{der} \geq \underbrace{Sp(2n)}_{\text{semisimple}}$

donc $D_{k^{sep}} \simeq GSp(2n)/Sp(2n)$

et $D \simeq \mathbb{G}_m$ de H^1 trivial $\rightsquigarrow$ ok

A $\rightsquigarrow$ $D = \operatorname{Hom}_{k\text{-gr}}(\operatorname{Hom}_{k\text{-gr}}(G,\mathbb{G}_m),\mathbb{G}_m) \simeq Z / Z \cap G^{der}$

$Z = \{(x,t) \in F^\times \times \mathbb{Q}^\times \ / \ N_{F/F_0}(x) = t\}$

$Z \cap G^{der} = \{x \in F^\times \ / \ N_{F/F_0}(x)^n = 1\}$

$\rightsquigarrow D = \{(x,t) \in F^\times \times \mathbb{Q}^\times \ / \ N_{F/F_0}(x) = t^n\}$

$\simeq D_1 \times \mathbb{Q}^\times$ si n pair

où $1 \to D_1 \to \operatorname{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \to \operatorname{Res}_{F_0/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \to 1$

Shapiro $\rightsquigarrow$ $H^1(\mathbb{Q}, \operatorname{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m) = H^1(F, \mathbb{G}_m)$

Hilbert 90 $\rightsquigarrow$ $H^1(\mathbb{Q}, \operatorname{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m) = \{1\}$

$F^\times \to F_0^\times \to H^1(\mathbb{Q}, D_1) \to 1 \quad \rightsquigarrow Ш^1(\mathbb{Q}, D_1) = \{1\}$

<u>Prop 14</u> : Dans le cas (A, n impair), on a $Ш^1(\mathbb{Q}, Z) \xrightarrow{\sim} Ш^1(\mathbb{Q}, G)$.

<u>Demo</u> :

Lem 12 $\rightsquigarrow$ on veut mq $Ш^1(\mathbb{Q},Z) \xrightarrow{\sim} Ш^1(\mathbb{Q},D)$

Injectivité :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & Z \cap G^{der} \arrow[r] & Z \arrow[r] & D \arrow[r] & 1 & \text{pour } G \\ 1 \arrow[r] & Z \cap G^{der} \arrow[r] \arrow[u, equal] & D_1 \arrow[r, "\wedge"] \arrow[u] & D_1 \arrow[r] \arrow[u] & 1 & \text{pour } G_1 \end{tikzcd}$$

$H^1(\mathbb{Q}_v, D_1) = (F_0)_v^\times / N_{F/F_0}(F_v^\times)$ tué par 2

n impair $\rightsquigarrow$ $H^1(\mathbb{Q}_v, D_1) \xrightarrow{\wedge} H^1(\mathbb{Q}_v, D_1)$ isom.

alors $H^1(\mathbb{Q}_v, Z \cap G^{der}) \to H^1(\mathbb{Q}_v, D_1)$ est 0 $\quad (*)$

donc $H^1(\mathbb{Q}_v, Z \cap G^{der}) \to H^1(\mathbb{Q}_v, Z)$ aussi

d'où $H^1(\mathbb{Q}_v, Z) \hookrightarrow H^1(\mathbb{Q}_v, D)$

$(*)$ + ppe de Hasse pour D_1 $\rightsquigarrow$ $H^1(\mathbb{Q}, Z \cap G^{der}) \xrightarrow{0} H^1(\mathbb{Q}, D_1)$

de m̂ : $H^1(\mathbb{Q}, Z) \hookrightarrow H^1(\mathbb{Q}, D)$ $\rightsquigarrow$ ok

Surjectivité : il suffit de voir $Ш^2(\mathbb{Q}, Z \cap G^{der}) = \{1\}$

Tate-Nakayama $\rightsquigarrow$ $Ш^2$ dual à $Ш^1(\mathbb{Q}, X^*(Z \cap G^{der}))$

Shapiro $\rightsquigarrow$ $Ш^1(\mathbb{Q}, X^*(Z \cap G^{der})) = Ш^1(F/F_0, X)$

pour un certain module X

en utilisant v place de F_0 qui en reste une sur F,

ce $Ш^1$ est $\{1\}$ $\rightsquigarrow$ ok

Prop 15 : Soit $(V', (\,,\,)')$ un $B\otimes\mathbb{Q}_p$-module antihermitien non dégénéré tq $V\otimes\mathbb{Q}_p \simeq V'$ en tant que $B\otimes\mathbb{Q}_p$-modules. Supposons que V' admette un $\mathcal{O}_B\otimes\mathbb{Z}_p$-réseau autodual Λ'.
Si G est de type D, on suppose de plus $p\neq 2$ et que $[V']$ soit envoyé sur 1 par $H^1(\mathbb{Q}_p, G)\to H^1(\mathbb{Q}_p, G/G^0)$ compo. neutre
Alors il existe un isom.

$$\begin{array}{ccc} \phi : V\otimes\mathbb{Q}_p & \longrightarrow & V' \\ \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \\ \Lambda & \xrightarrow{\sim} & \Lambda' \end{array}$$

de $B\otimes\mathbb{Q}_p$-modules antihermitiens.

Rq : La condition sur l'image du H^1 nous permet de nous assurer que Λ et Λ' sont dans la même classe d'isom. de formes sur $\mathbb{F}_p$ (type D).

Demo ($p\neq 2$, type A ou C) :
sur $\mathbb{F}_p{}^m$, il n'y a qu'une seule classe d'isom. de formes hermitiennes (resp. bilinéaire alternée)
soit $\overline{\Phi} : \Lambda/p\Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda'/p\Lambda'$ un isom. de $\mathcal{O}_B\otimes\mathbb{F}_p$-mod. antihermitiens
en changeant $(\,,\,)'$ par une constante, on peut supposer $(\overline{\Phi}\cdot, \overline{\Phi}\cdot)' = (\cdot,\cdot)$
Λ $\mathcal{O}_B\otimes\mathbb{Z}_p$-module projectif $\rightsquigarrow \exists\, \phi_0 : \Lambda\to\Lambda'$ tq $\phi_0 \bmod p = \overline{\Phi}$
Nakayama $\rightsquigarrow \phi_0$ isom. de $\mathcal{O}_B\otimes\mathbb{Z}_p$-mod.
par ϕ_0, on identifie V et V', Λ et Λ'
$\rightsquigarrow (\,,\,)'$ autre forme non dégénérée sur V pour laquelle Λ est autodual ; et $(\,,\,) = (\,,\,)' \bmod p$
$C_0 := \mathrm{End}_{\mathcal{O}_B\otimes\mathbb{Z}_p}\Lambda \subseteq C$ préservé par $*$
soit $e\in C_0$ tq $(v,w)' = (ev, w)$ $\forall v,w\in\Lambda$ $\rightsquigarrow e = e^*$
on cherche $\psi\in C_0$ tq $\mathrm{id}_\Lambda + p\psi : (\Lambda/p^2\Lambda, (\,,\,)) \xrightarrow{\sim} (\Lambda/p^2\Lambda, (\,,\,)')$ isom. de $\mathcal{O}_B\otimes\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-modules antihermitiens
condition sur ψ : $\frac{e-1}{p} = \psi + \psi^* \bmod p$
$\rightsquigarrow \psi = \frac{1}{2}\,\frac{e-1}{p} \in C_0$ convient (car $p\neq 2$)
récurrence $\rightsquigarrow$ ok

Quelques propriétés supplémentaires pour G

$H(\mathbb{Q}) = C^\times$, $i : G \hookrightarrow H$
$\gamma : G \longrightarrow \mathbb{G}_m$ défini par $(g\cdot, g\cdot) = \gamma(g)(\cdot,\cdot)$

Prop 16 : $x, y\in G(\overline{\mathbb{Q}})$ sont conjugués si et seulement si $\left|\begin{array}{l} i(x), i(y) \text{ sont conjugués dans } H(\overline{\mathbb{Q}}), \\ \gamma(x) = \gamma(y). \end{array}\right.$

Demo : Springer - Steinberg, Conjugacy classes

$K_p = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Lambda \subseteq K_H := \mathrm{Stab}_{H(\mathbb{Q}_p)}\Lambda$

Prop 17 : Soient $x, y\in G(\mathbb{Q}_p)$. On a :
$K_H\, i(x)\, K_H = K_H\, i(y)\, K_H \Rightarrow K_p x K_p = K_p y K_p$.

Refs :
Kottwitz, Points on some Shimura varieties over finite fields
Kottwitz, Stable trace formula : cuspidal tempered terms
Borel - Serre, Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne
Kneser, Lectures on Galois cohomology