Représentations lisses II

F corps local non-Archimédien, complet pour v (ou $|\,|$), de car résiduelle $p>0$, $\mathcal{O} \subseteq F$, $\varpi \in \mathcal{O}$

$\underline{G}/F$ grp réductif connexe, $G = \underline{G}(F)$, ν Haar sur G

Coefficients matriciels, représentations compactes

Def : (π, V) rep. lisse, $\xi \in V$, $\xi^\vee \in V^\vee$. La fonction $g \xrightarrow{m_{\xi,\xi^\vee}} \langle \xi^\vee, \pi(g^{-1})\xi \rangle$ est appelée coefficient matriciel.

Def : Une repr. lisse (π, V) est dite compacte (ou finie) si $m_{\xi,\xi^\vee}$ est de support compact pour tous $\xi \in V$, $\xi^\vee \in V^\vee$.

Rq : Les rep's compactes vont se comporter comme des rep's de grps compacts.

π compacte, π' ss-quotient de $\pi \Rightarrow \pi'$ compacte

Rq : π compact, π' ss-quotient de π ...

Prop 1 : (π, V) compacte ssi $\forall K \leq G$ o.c., $\forall \xi \in V$, $D_{\xi,K} : g \mapsto \pi(e_K)\pi(g^{-1})\xi$ a support compact.

Prop 2 : V repr. compacte et fin. engendrée (en particulier si irred.). Alors V est admissible.

Demo :

$K \leq G$ o.c.

V engendrée vectoriellement par les $\pi(g)\xi_i$, $g \in G$, $1 \leq i \leq k$

$V^K = \pi(\underbrace{e_K}_{\frac{\mathrm{char}\,K}{\nu(K)}})V$ engendrée vector. par les $\pi(e_K)\pi(g)\xi_i$, $g \in G$, $1 \leq i \leq k$

↳ par compacité, un nb fini d'entre eux sont lin. indépendants

Rq : par Schur, pas de repr. irred. admiss. compact si G n'a pas centre compact

Le groupe G°

$G^\circ := \bigcap_{\chi \in X^*(\underline{G})} \mathrm{Ker}\,|\chi|$

$1 \to G^\circ \to G \to \Lambda(G) \to 1$

Ex : $G = GL_n(F)$, $G^\circ = \{g \in G \,/\, \det g \in \mathcal{O}^\times\}$

Prop 3 : (i) $G^\circ \trianglelefteq G$ ouvert, fermé, unimodulaire

(ii) G° a centre compact

(iii) G/G° abélien libre de $\mathrm{rg}\ \ell$.

(iv) $Z(G)G^\circ$ est d'indice fini dans G.

(v) G° contient tout $K \leq G$ compact.

Def : V est compacte modulo centre si $m_{\xi,\xi^\vee}$ est de supp compact mod. centre $\forall \xi \in V$, $\xi^\vee \in V^\vee$.

Def : V est cuspidale (ou q-cuspidale de B-R) si $r_{\pi}^{G}(V) = 0$ $\forall M \subsetneq G$ Levi

Thm 4 (Harish-Chandra) : On a équivalence entre

(i) (π, V) cuspidale

(ii) (π, V) compacte mod. centre

(iii) $(\pi, V)|_{G^\circ}$ compacte.

Rq (pour irred.) :

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : $Z(G)G^\circ \leq G$ d'indice fini + Schur (dénomb à ∞)

Demo (pour GL_n) :

$K_0 = GL_n(\mathcal{O}) \triangleright K_i = \mathrm{Ker}\,(K_0 \to GL_n(\mathcal{O}/\varpi^i))$

Fait : $\lambda \in \Lambda^+$, $\bigcup_n \mathrm{Ker}\, a(\lambda^n) \cap V^K = V(U_\lambda) \cap V^K$

$K = K_i$, $\xi \in V^K$

$\Lambda^+ = \{\mathrm{Diag}\{\varpi^{a_i}\} \,/\, a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n\}$

$G^\circ = K^\circ \Lambda_0^+ K^\circ \rightsquigarrow \Lambda_0^+ \simeq (\mathbb{Z}^+)^{n-1}$

(i) $\Rightarrow$ (iii) : on veut mq $\lambda \mapsto \pi(a(\lambda))\xi$ a supp compact pour $\lambda \in \Lambda_0^+$

on prend $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ base du monoïde Λ_0^+

et $\lambda = \sum m_i \nu_i$ avec $m_i \geq 0$

par le Fait, $\pi(a(\lambda^n))\xi = 0$ pour $\underbrace{n \gg 0}_{\text{dépendant de } \lambda \notin Z(G)}$

$\exists L \geq 0$, $m_i \geq L \Rightarrow \pi(a(\lambda))\xi = 0$

$\Rightarrow \lambda \mapsto \pi(a(\lambda))\xi$ supp. compact

(iii) $\Rightarrow$ (i) : on renverse la preuve

Cor 5 : V repr de G irred et cuspidale. Alors

Demo :

$ZG^\circ \leq G$ d'indice fini $\rightsquigarrow$ $V|_{ZG^\circ}$ fin. engendrée

Schur $\rightsquigarrow$ Z agit par un caractère $\rightsquigarrow V|_{G^\circ}$ fin. engendré

~~Ae~~ ~~&~~ or $V|_{G^\circ}$ composée (Harish-Chandra)

$\rightsquigarrow V|_{G^\circ}$ admiss. (Prop 2)

$\rightsquigarrow V$ admiss. (car tout compact de G est dans G°).

Thm 6 : Toute repr irred V est admiss.

Demo :

$\exists P = MU$ parabolique et E irred. cusp.

tq $V \hookrightarrow i_P^G E$

$\underbrace{}_{\text{admiss. par Cor 5.}}$

$\rightsquigarrow i_P^G E$ admiss. car $P\backslash G$ compact

$\rightsquigarrow V$ admiss.

Représentations de carré intégrable, tempérées

Def : V est dite de carré intégrable (resp. mod. centre) si $\forall \xi \in V, \xi^\vee \in V^\vee$, $m_{\xi,\xi^\vee} \in L^2(G)$ (resp. $L^2(G/Z)$).

Def : V est dite unitaire s'il existe un produit scalaire G-invariant $\langle\, , \rangle : V \otimes \overline{V} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\underbrace{\overline{V}}_{\text{conjugué complexe}}$

Rq : V non néc. Hilbert (ie pas complet)

Rq : V unitaire admiss. $\Rightarrow \overline{V} \cong V^\vee$.

Rq : unitarité préservée par i_P^G :

si $f_1, f_2 \in i_P^G V$ $\quad \langle\, , \rangle$ sur V :

$(f_1, f_2) = \int_{P\backslash G} \langle f_1(g_x), f_2(g_x) \rangle \, d\nu_{P\backslash G}(x)$

où $g_x \in G \longrightarrow x \in P\backslash G$.

Lem 7 : V irred. Alors il existe au plus (à un scalaire près) une structure unitaire sur V.

Demo :

V admiss. (par Thm 6)

par la Rq préc., on a : $V \longrightarrow \overline{V}^\vee \simeq V^{\vee\vee} \simeq V$

donnée équivalente à $\langle\, , \rangle$ $\qquad \underbrace{}_{\text{admiss.}}$

$\mathrm{Hom}(V,V) = \mathbb{C}$ (Schur).

Prop 8 : V irred. de carré intégrable. Alors V est unitaire (structure unique à scalaire près).

Rq : un seul coeff L^2 suffit

Demo :

Prenons $\xi^\vee \in V^\vee \setminus \{0\}$

$\xi \longmapsto m_{\xi,\xi^\vee}$ est une appl. $V \longrightarrow L^2(G)$,

qui est injective par irred. de V

$\rightsquigarrow V$ est unitaire (et ne dépend pas de $\xi^\vee$ par Lem 7)

Rq : Si G est de centre non compact, alors il n'existe pas de repr. de carré intégrable.

Demo :

Supposons V de carré int. et $\underbrace{\text{irred.}}$ flèche vers V unitaire

$\rightsquigarrow V$ unitaire (Prop 8) $\qquad$ loisible car unitaire donc décomposable total.

Alors le caract. central χ est unitaire (ie $|\chi(z)| = 1 \;\; \forall z \in Z(G)$)

$\rightsquigarrow$ contredit carré int.

Def : V repr. avec caract. central unitaire. Alors V est dite de carré intégrable modulo centre si $\int_{G/Z} |m_{\xi,\xi^\vee}(g)|^2 \, d\nu(g) < \infty$ $\quad \forall \xi \in V, \xi^\vee \in V^\vee$.

Prop 9 : V repr. irred. avec caract. central unitaire et de carré int. mod. centre.

Alors V est unitaire.

Prop 10 : V unitaire ~~semi-si~~ admiss. Alors V est semisimple.

Demo :

W ss-rep $\rightsquigarrow W^\perp$ vérifie $W^\perp \cap W = \{0\}$

Appl 11. ρ cuspidal de $M \leq G$ Levi, ψ caractère non ramifié de M générique. Alors $i_M^G(\rho\psi)$ irred.

Idée :

- on change ψ pour avoir un caract. central unitaire
- par Thm 4 et Prop 9, la repr. est unitaire
- par Prop 10, elle est complètement réductible
- par Prop 10, $r_M^G \circ i_M^G(\psi\rho)$ est filtré par les $w(\rho\psi)$
- ces morceaux ont différents caractères
- comme ces morceaux ont différents caractères centraux, c'est une $\oplus$ (en tant que M-rep's)
- $\mathrm{Hom}_G(i_M^G(\rho\psi), i_M^G(\rho\psi)) = \mathrm{Hom}_M(r_M^G \circ i_M^G(\rho\psi), i_M^G(\rho\psi))$
  $= \mathbb{C}$

Critère de Casselman

$a(G) := \Lambda(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \Lambda(Z(G)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

$a(G)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda(G) \otimes \mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(G)/\Lambda(G)_{tor}, \mathbb{R})$

$= \mathrm{Hom}_{grps}(G/G^\circ, \mathbb{R}^+_\times) = \mathrm{Hom}^{lisse}_{grps}(G, \mathbb{R}^+_\times)$

ψ caractère $\Rightarrow |\psi| \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}^+_\times) \Rightarrow \log|\psi| \in a(G)^*$

Déf : π irred. de car. central χ

$e(\pi) := \log|\chi| \in a(G)^*$ exposant central

$P_0 = M_0 U_0$ parabolique minimal, $a := a(M_0)$

$P = MU$ parabolique standard (ie $M_0 \subseteq M$)

$\Phi \supseteq \underbrace{\Phi^+}_{\text{déterminé par } P_0} \supseteq \Delta$ racines simples

$\Phi_M \supseteq \Delta_M$ déterminé par (P, M)

$a^*_+ = \{\sum c_i \alpha_i \,/\, \alpha_i \in \Delta, c_i \leq 0\}$ opposé de la chambre de Weyl

$a(M)^*_+ = a^*_+ \cap a(M)^*$

Déf : Un exposant central $e \in a(M)^*$ est dit négatif (resp. strict. négatif) si $e \in -a(M)^*_+$ (resp. $e \in \mathrm{Int}(-a(M)^*_+)$).

[illegible]

de long $< \infty$. Alors π est de carré int. ssi $\forall M \leq G$ Levi standard les exposants centraux de $r_M^G(\pi)$ sont strict. négatifs dans $a(M)^*$.

Rq : inutile de le tester sur tous les foncteurs de Jacquet, uniquement pour les cuspidales.

Rq : $a^+ = a(G) \oplus (a(G)^\perp)^+$

critère semblable en mod. centre et stricte négativité sur $\Lambda \cap (a(G)^\perp)^+$. $\Big\}$ (*)

Déf : π est tempérée si tous les exposants centraux de $r_M^G(\pi)$ sont négatifs $\forall M \leq G$ Levi standard

Prop 12. V irred. Alors V est tempérée ssi $\exists P = MN$ parabolique standard et E une irred. de carré int. mod. centre tq $V \hookrightarrow i_M^G E$.

Cor 13. Irred tempérée $\Rightarrow$ unitaire.

Démo :

Prop 12 + Prop 9 + Rq sur i_M^G (unitaire)

Classification de Langlands

Déf. Un triplet de Langlands est la donnée de :

- un ss grp parabolique standard $P = MU$
- une repr. irred. tempérée σ de M
- un caractère non ramifié χ de M tq $\underbrace{\ln|\chi| \in \overset{\mathrm{Int}}{\vee}\, a(M)^*_+}_{\text{tient compte du centre avec (*)}}$

Thm 14 :

(i) Si $(P = MN, \sigma, \psi)$ triplet de Langlands, alors $i_M^G(\sigma)$ admet un unique quotient irred. $L(P, \sigma, \psi)$

(ii) Si $L(P_1, \sigma_1, \psi_1) \simeq L(P_2, \sigma_2, \psi_2)$ alors on a $M_1 = M_2$, $|\psi_2 \psi_1^{-1}| = 1$, $\sigma_1 \psi_1 \simeq \sigma_2 \psi_2$.

(iii) Toute repr. irred est de la forme $L(P, \sigma, \psi)$.

Déf. Un segment est un ensemble de classes de rep's cuspidales irred. [illegible] que l'on note $\Delta = [\rho, \rho(r-1)]$.

Def : Δ_1 et Δ_2 liés si $\Delta_1 \not\subset \Delta_2$, $\Delta_2 \not\subset \Delta_1$ et $\Delta_1 \cup \Delta_2$ est un segment.

Δ_1 précède Δ_2 si Δ_1 et Δ_2 liés si $\rho_2 = \rho_1(m)$ pour un $m \geq 0$ entier.

Prop 15 : $G = GL_n(F)$. Toute repr tempérée est de la forme $\mathrm{Ind}_P^G L(\Delta_1) \otimes \dots \otimes L(\Delta_r)$ pour des segments $\Delta_i = [\rho_i, \rho_i(s_i)]$ où ρ_i cusp. irred. tq $\rho_i |\det|^{s_i/2}$ unitaire.

Cor 16 : $G = GL_n(F)$

(i) $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments tq si $i<j$, Δ_i ne précède pas Δ_j. Alors $\mathrm{Ind}_P^G \underbrace{L(\Delta_1)}_{} \otimes \dots \otimes L(\Delta_r)$ existe déjà par Thm 14 admet un unique quotient $L(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$.

(ii) $L(\Delta_1, \dots, \Delta_r) \simeq L(\Delta_1', \dots, \Delta_s')$ ssi les suites $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ et $(\Delta_1', \dots, \Delta_s')$ sont égales à l'ordre des termes près.

(iii) Toute repr. irred. est de la forme $L(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$.

Vers la décomposition de Bernstein

Lem 17. W irred compacte. Alors

$$\alpha : \left| \begin{array}{l} W \otimes W^\vee \longrightarrow (\mathrm{End}\, W)^\infty \\ \xi \otimes \xi^\vee \longmapsto (w \mapsto \langle w, \xi^\vee \rangle \xi) \end{array} \right.$$ isom de $G\times G$-rep's

Demo :

Injectivité claire

Prop 2 $\leadsto$ W admiss.

au niveau des $K \times K$ invariants, inj $\Rightarrow$ bijectif (par dim's)

Prop 18. (ρ, W) irred. compacte. Alors il y a un morphisme naturel de $G \times G$-rep's $\varphi : \mathcal{H}(G) \to W \otimes W^\vee$, ... près

Demo :

$\rho : \mathcal{H}(G) \longrightarrow (\mathrm{End}\, W)^\infty$, $\varphi := \alpha^{-1} \circ \rho$

$\mathrm{Hom}_{G\times G} (\mathcal{H}(G), W \otimes W^\vee) = \mathrm{Hom}_{G\times G} (W^\vee \otimes W, \mathcal{H}(G)^\vee)$

$\subset \mathrm{Hom}_{G\times G} (W^\vee \otimes W, \underset{\text{plongé diag.}}{C^\infty(G\times G / G)})$ (G unimod.)

$= \mathrm{Hom}_{G\times G} (W^\vee \otimes W, \mathrm{Ind}_G^{G\times G} \mathbb{C})$

$= \underbrace{\mathrm{Hom}_G (W^\vee \otimes W, \mathbb{C})}_{\text{Frobenius}} \underbrace{=}_{\text{Schur}} \mathbb{C}$

Rq : La normalisation de φ permet de définir $\mathrm{tr}\, \rho = \langle , \rangle \circ \varphi$.

Prop 19. (ρ, W) irred compacte. Alors $\varphi \circ m \in \mathbb{C}^\times \mathrm{Id}$.

Demo

$\varphi \circ m \in \mathbb{C}\, \mathrm{Id}$ par Schur

Prenons $h = m(\xi \otimes \xi^\vee) \neq 0$. On veut mq $\varphi(h) \neq 0$, ou encore $\rho(h) \neq 0$.

- pour tout $\pi \not\simeq \rho$ irred, alors $\pi(h) = 0$

en effet, $\left| \begin{array}{l} W \otimes W^\vee \longrightarrow |\pi| \\ \xi \otimes \xi^\vee \longmapsto \pi \circ m(\xi \otimes \xi^\vee) v \end{array} \right.$ est un morphisme de G-rep's pour $v \in V$, qui est donc nul.

- Lemme de séparation : $\exists \pi$ irred. $\pi(h) \neq 0$

donc $\rho(h) \neq 0$ et $\varphi \circ m \in \mathbb{C}^\times \mathrm{Id}$.

(besoin de G dénomb à ∞ ; $u = h \cdot (\mathrm{inv}\, h)$ non nilp $\leadsto \exists \pi$, $\pi(u)$ n'agit pas trivialement car $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $u - \lambda$ non inversible).

Def : $\varphi \circ m = \dfrac{1}{d(\rho)} \mathrm{Id}$ degré formel

Traduction : $m_{v,v^\vee} \cdot w = \dfrac{1}{d(\rho)} \alpha(v \otimes v^\vee)(w)$, $w \in |\rho|$

$\int_G \langle g^{-1} v, v^\vee \rangle g w \, d\mu(g) = \dfrac{1}{d(\rho)} \langle w, v^\vee \rangle v$

orthogonalité de Schur :

$\int_G \langle g^{-1} v, v^\vee \rangle \langle g w, w^\vee \rangle d\mu(g) = \dfrac{1}{\dots} \langle v, w^\vee \rangle \langle w, v^\vee \rangle$

Rq : $d(e)$ dépend de la mesure de Haar ν_G

Rq : si G compact et $\nu(G) = 1$, alors $d(e)$ est bien la dimension usuelle

<u>Composante isotypique</u>

(π, W) irred. compacte, $K \leq G$ c.c.

$W = W^K \oplus W_K$ (car K-semi-simple) $\rightsquigarrow \mathbb{1}_{W^K}$ projecteur

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{End}\, W)^{\infty} \arrow[r, "\alpha^{-1}", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "\Phi"'] & W \otimes W^{\vee} \arrow[r, "m"] & \mathcal{H}(G) \arrow[r, "\Psi"] & W \otimes W^{\vee} \end{tikzcd}$$

$e^{\pi}_K := \Phi(\mathbb{1}_{W^K})$, $\underbrace{e^{\pi}}_{\text{agit sur } w \in W^K \text{ comme } e^{\pi}_K} := \varinjlim e^{\pi}_K$

- bien défini car $e^{\pi}_K \cdot \underbrace{e_K}_{= \frac{\mathrm{char}\, K}{\nu(K)}} = e^{\pi}_K$
- morphisme de G-équiv. car $e^{\pi}_{gKg^{-1}} = (g, g) \cdot e^{\pi}_K$
- idempotent.

V lisse admiss. e^{π} agit comme e^{π}_K sur V^K

$V = e^{\pi}V \oplus (1 - e^{\pi})V = \mathrm{Im}\, e^{\pi} \oplus \mathrm{Ker}\, e^{\pi}$.

<u>Prop 20</u>.

(i) $e^{\pi}V$ est somme directe de copies de W

(ii) $e^{\pi} : V \longrightarrow V$ est trivial ssi V n'a pas de ss-quotient isomorphe à W

<u>Cor</u> : $\mathrm{Rep}\, G = \underbrace{R^{\pi}(G)}_{\simeq \oplus W} \times \underbrace{R_{\pi}(G)}_{\mathrm{JH} \not\ni W}$

<u>Démo</u> :

En tant que $G \times 1$-rep, $W \otimes W^{\vee}$ est somme de copies de W $\rightsquigarrow \mathrm{Im}\, \Phi \subseteq \mathcal{H}(G)$ aussi $\rightsquigarrow e^{\pi}W$ aussi

si $e^{\pi}W = 0$, alors $\forall V'$ ss-quotient de V, $e^{\pi}V' = 0$

si $e^{\pi}V \neq 0$, V contient une copie de W sur

<u>Ref</u> :

Bernstein - Rumelhart, Representations of p-adic groups

Renard, Représentations des groupes p-adiques

Rodier, Représentations de $GL_n(k)$ où k est un corps p-adique

Roche, The Bernstein decomposition and the Bernstein center