APPLICATION DE LA FORMULE DE LEFSCHETZ

GOT, 06/02/12.

Plan :

F extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}$ anneau des entiers de F, k corps résiduel.

Rappel : si $\tau \in W_F$, $h \in C_c^\infty(Gl_n(F))$, on aimerait associer à τ, h une fonction $f_{\tau,h} \in C_c^\infty(Gl_n(F))$ tq pour toute rep irréd. lisse de $Gl_n(F)$ π, il existe une rep $rec(\pi)$ de dim n de W_F tq :
$$tr(f_{\tau,h} | \pi) = tr(\tau | rec(\pi))\, tr(h | \pi).$$

Pour cela, on va plonger la situation locale dans une variété de Shimura. La formule précédente sera alors une conséquence de la formule des traces. Dans cet exposé, j'explique à quels objets on applique la formule des traces de Lefschetz (avec termes locaux naïfs). C'est l'objet du §2. Évidemment, le plus difficile reste à faire : calculer les termes et faire lien avec le problème du début !

Section 1 : on applique la formule de Lefschetz sur la fibre générique d'une variété de Shimura (d'après Fargues). C'est différent du cas considéré en §2, et inutile pour la suite, mais dans ce cas, on peut faire les (jolis) calculs, et ça donne une petite idée de ce qui suivra ...

Réf : §1 : L. Fargues, *Correspondance de Langlands locales dans la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink*, sections 6, 7

§2 : P. Scholze, *The local Langlands correspondence ....*, § 8-9

The Langlands-Kottwitz method ..., § 7.

1) Formule de Lefschetz sur la fibre générique

Donnée de Shimura (G, X)

$(Sh_K)_{K \subset G(\mathbb{A}_f)}$ variété de Shimura associée, définie sur le corps réflex E.

$G(\mathbb{A}_f)$ agit à droite sur ce système projectif : au niveau des points,

$$G(\mathbb{Q})\backslash (X \times G(\mathbb{A}_f)/K) \to G(\mathbb{Q})\backslash (X \times G(\mathbb{A}_f)/g^{-1}Kg)$$
$$[x, aK] \mapsto [x, ag(g^{-1}Kg)]$$

Soit K un sous-gr compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$, $g \in G(\mathbb{A}_f)$. On a donc une correspondance :

$$\begin{tikzcd} Sh_{gKg^{-1} \cap K} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_1"'] & Sh_{K \cap g^{-1}Kg} \arrow[d, "p_2"] \\ Sh_K & Sh_K \end{tikzcd}$$

Si $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f))$ (algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A}_f)$), on peut toujours écrire f comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbb{1}_{KgK}$, avec K assez petit pour que la $\underbrace{\text{correspondance de Hecke associée à } KgK}$ soit un cycle dans $Sh_K \times Sh_K$: $Sh_{K \cap gKg^{-1}} \hookrightarrow Sh_K \times Sh_K$. (en cohomologie)

Soit ξ représentation algébrique de G, $\mathcal{F}_\xi$ le système local associé sur $(Sh_K)_K$. On a une correspondance :

$$Sh_K \xleftarrow{c_1 = p_1} Sh_{K \cap gKg^{-1}} \xrightarrow{c_2 = p_2 \circ g} Sh_K$$

qui s'étend naturellement à $\mathcal{F}_{\xi, K}$: les pullbacks de $\mathcal{F}_{\xi, K}$ par p_1, p_2 ~~et g~~ sont canoniquement isomorphes à $\mathcal{F}_{\xi, K \cap gKg^{-1}}$ et $\mathcal{F}_{\xi, K \cap g^{-1}Kg}$ respectivement et le pullback de $\mathcal{F}_{\xi, K \cap g^{-1}Kg}$ par g est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}_{\xi, K \cap gKg^{-1}}$ (l'isomorphisme dépend de g !).
(provenant de $K \cap gKg^{-1}$)

On prend donc juste comme correspondance cohomologique

$$c_2^! \mathcal{F}_{\xi,K} \to c_1^* \mathcal{F}_{\xi,K}$$

la composition de ces isomorphismes canoniques.

D'où des morphismes d'algèbres compatibles quand K varie :

$$\mathcal{H}(G,K) \to \mathrm{Coh}(\mathcal{F}_{\xi,K},\mathcal{F}_{\xi,K})$$

On a aussi $\pi : \mathcal{H}(G,K) \to \mathrm{End}(H^\bullet(Sh_K, \mathcal{F}_{\xi,K}))$

$$f \mapsto \int_{G(\mathbb{A}_f)} f(g)\,\xi(g)\,dg$$

$\xi(g)$ = action de $g \in G(\mathbb{A}_f)$ sur la cohomologie

tel que :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(G,K) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coh}(\mathcal{F}_{\xi,K},\mathcal{F}_{\xi,K}) \arrow[dl] \\
& \mathrm{End}(H^\bullet(Sh_K, \mathcal{F}_{\xi,K})) &
\end{tikzcd}$$

action d'une correspondance cohomologique sur la cohomologie.

<u>Ce qui nous intéresse</u> : la trace de $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f))$ sur la cohomologie.
Ce qu'on vient de dire montre que l'on est ramené à calculer la trace de la correspondance associée à KgK, que l'on notera KgK, pour $g \in G(\mathbb{A}_f)$ et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ sous-gr compact ouvert (assez petit pour avoir la condition de cycle).

$\rightsquigarrow$ la formule de traces (dont on justifiera + loin l'utilisation) amène à considérer : $\mathrm{Fix}(KgK) = (\Delta \cap Sh_{K\cap gKg^{-1}})$ (cycle)

<u>Description des points complexes de $\mathrm{Fix}(KgK)$</u> :

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{ x \in Sh_{K\cap gKg^{-1}}(\mathbb{C}),\ p_1(x) = p_2(gx) \}$$

On sait que : $Sh_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G(\mathbb{A}_f)/K)$

Notons les deux faits suivants, faciles mais utiles :

* Quitte à rétrécir K, $G(\mathbb{Q})$ agit librement sur $X \times G(\mathbb{A}_f)/K$

(car $G(\mathbb{Q})$ discret dans $G(\mathbb{A}_f)$ + K compact)

* $\forall (x, yK) \in X \times G(\mathbb{A}_f)/K$ il existe Ω voisinage de x ds X tel que p induise un isomorphisme analytique de $\Omega \times \{yK\}$ sur $p(\Omega \times \{yK\})$ (où $p : X \times G(\mathbb{A}_f)/K \to G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f)/K)$ projection canonique)

(découle du 1° pt)

Revenons à $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$. On a donc :

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{[x, y(gKg^{-1} \cap K)],\ [x, yK] = [x, ygK]\}$$

L'hypothèse (cycle) permet de voir $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$ comme sous-ensemble de $Sh_K(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{[x, yK],\ [x, yK] = [x, ygK]\}.$$

On a : $[x, ygK] = [x, yK] \iff \exists \gamma \in G(\mathbb{Q}) \cap ygKy^{-1}\ \ \gamma x = x$.

S'il existe un tel γ est uniquement déterminé par x et yK (action libre de $G(\mathbb{Q})$).

Un tel γ est semi-simple elliptique.

De plus si $\gamma' \in G(\mathbb{Q})$ on voit que $\gamma' \gamma \gamma'^{-1}$ est associé au point fixe

$$[\gamma' x, \gamma' y K] = [\gamma' x, \gamma' y g K]$$

D'où :

Prop 1 : $\displaystyle \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\}_{ss} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$

où $\{G(\mathbb{Q})\}_{ss} = \{$classes de conjugaison semi-simples de $G(\mathbb{Q})\}$

et $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}} = \left\{[x, yK],\ \exists \tilde{\gamma} \in \{\gamma\},\ \begin{array}{l} \tilde{\gamma} x = x \\ \tilde{\gamma} y K = ygK \end{array}\right\}$

Prop 2 : Si la classe de conjugaison $\{\gamma\}$ est associée à un point fixe de KgK, alors $\{\gamma\}$ associée à tout point de la composante connexe de ce point dans ~~Ko~~ $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$, i.e. :

$$\pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})) = \bigsqcup_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\}_{ss} \\ \gamma \text{ elliptique ds } G(\mathbb{R})}} \pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}})$$

Dém : (idée)

Il suffit de mq tout $[x, yK] \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ a un voisinage U dans Sh_K tq $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) \cap U \subset \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$.

On prend alors Ω voisinage compact de x dans X.

$A = \{g \in G(\mathbb{R}),\ g\Omega \cap \Omega \neq \emptyset\}$

compact de $G(\mathbb{R})$ (Ω compact + $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ K_∞ compact)

Quitte à rétrécir Ω

$\Omega \times \{yK\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{yK\})$ ~~Comme $\Omega\times\{yK\}$ ouvert~~ $p(\Omega \times \{yK\})$ ouvert de Sh_K. (~~$\Omega\times\{yK\}$ ouvert~~ : $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ fini!)

$[x', yK] \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$ avec $x' \in \Omega$

$\gamma' \in G(\mathbb{Q})$ unique tq $\gamma' x' = x'$, $\gamma' yK = ygK$

$\rightsquigarrow \gamma'\Omega \cap \Omega \neq \emptyset$ et $\gamma' \in ygKy^{-1} \cancel{\cap G(\mathbb{Q})}$

Donc $\gamma' \in A \times ygKy^{-1} \subset G(\mathbb{A})$ compact
$\gamma' \in G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{A})$ discret
$\Big\}$ fini

Rétrécit $\Omega \rightsquigarrow$ le résultat. $\square$

Prop 3 : Tout élément de $\pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}))_{\{\gamma\}}$ est composante connexe de l'image d'une variété de Shimura associée à G_γ° (G_γ = centralisateur de γ)

Dém (idée)

$[x, yK] \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ $\quad \gamma x = x$, $\gamma yK = ygK$

$x \rightsquigarrow h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ $\quad \gamma x = x \Leftrightarrow h_x : \mathbb{S} \to (G_\gamma^\circ)_{\mathbb{R}}$

$Y = G_\gamma^\circ(\mathbb{R}) / C_{G_\gamma^\circ(\mathbb{R})}(h_x) \hookrightarrow X$ $\quad K' = yKy^{-1} \cap G_\gamma^\circ(\mathbb{A}_f)$

$$q : Sh_{K'}(G_\gamma^\circ, h_x)(\mathbb{C}) \to Sh_K(G, X)(\mathbb{C})$$
$$[x_1, y_1K'] \mapsto [x_1, y_1 yK]$$

revêtement fini

$[x, yK] \in \mathrm{Im}(q)$ $\quad \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$

On montre l'autre inclusion. $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ $\square$

Cor : $\mathrm{Fix}(KgK)$ est lisse sur E. (Prop 2+3) 1?)

Ce qu'il faut surtout retenir

Ce qu'on a vu montre qu'un point fixe est isolé ssi, avec les notations précédentes, les composantes connexes de la variété de Shimura que l'on a associé à G_γ sont des points, i.e si G_γ est un tore

$\Longleftrightarrow$ γ régulier.

Prop 4 : Si $z \in Sh_K(\mathbb{C})$ pt fixe isolé de KgK, Δ et $Sh_{gKg^{-1}\cap K} \hookrightarrow Sh_K \times Sh_K$ s'intersectent transversalement en z.

Dém : $z = [x, yK]$, $\gamma x = x$, $\gamma y K = \gamma y g K$.

Ω voisinage de x ds X tq $p : \Omega \times \{yK\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{yK\})$ et tq $p(\Omega \times \{yK\}) \cap \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{z\}$.

$$p : \Omega \times \{y(K\cap gKg^{-1})\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{y(K \cap gKg^{-1})\}).$$

Dans la carte locale $\Omega \times \{yK\} \simeq \Omega$,

$Sh_{K\cap gKg^{-1}} \hookrightarrow Sh_K \times Sh_K$ $\rightsquigarrow$ $\Omega \to \Omega\times\Omega$, $x' \mapsto (x', \gamma x')$

$\Delta \hookrightarrow Sh_K \times Sh_K$ $\rightsquigarrow$ $\Omega \to \Omega \times \Omega$, $x' \mapsto (x', x')$

Donc : intersection transverse en $z \Longleftrightarrow (d\gamma)_x : T_x\Omega \circlearrowleft$ ne possède pas 1 comme vp.

On écrit $K_\infty = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(x)$ $\qquad \underset{\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))}{\mathfrak{g}} = \overset{\mathrm{Lie}(K_\infty)}{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{p}$ (Cartan)

[Donc $\mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \subset \mathfrak{k}$ et l'intersection est ϕ.]

$$\begin{array}{ccc} T_x\Omega & \xrightarrow{(d\gamma)_x} & T_x\Omega \\ \wr\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow\wr \\ \mathfrak{p} & \xrightarrow{(\mathrm{Ad}\gamma)|_{\mathfrak{p}}} & \mathfrak{p} \end{array}$$

Donc Espace propre pour la vp 1 $\cong \mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \cap \mathfrak{p}$

Or $C^\circ_{G(\mathbb{R})}(\gamma) \subset K_\infty$ (si $\gamma' \in C^\circ_{G(\mathbb{R})}(\gamma)$),

$x = \gamma'^{-1}\gamma\gamma' x$, donc $\gamma' x$ point fixe de γ. Or γ régulier $\Rightarrow$ un seul pt fixe $\Rightarrow \gamma' x = x \to \gamma' \in K_\infty$. $\square$

Cor : Comme Sh_K est lisse, que $\mathcal{F}_{\xi,K}$ est localt cst, et que l'intersection de Δ et $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$ est transverse en un point isolé, On en déduit (cf l'exposé d'Ariyan ou Ex 6.1.13-1 Fargues)

$\Rightarrow$ si $z \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ isolé,

$$\mathrm{Loc}_z(f) = \text{terme naïf} = \mathrm{tr}(\xi(\gamma))$$

D'où :

<u>Th</u> $Sh(G,X)$ variété de Shimura compacte.

$f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f))$. On suppose qu'il existe v tq $\mathrm{supp}(f_v) \subset G(\mathbb{Q}_v)_{reg}$. Alors :

$$\mathrm{tr}(f, H^\cdot(Sh, \mathcal{F}_\xi)) = \sum_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbb{A}_f)_\gamma)\, \mathrm{tr}(\xi(\gamma))\, O_\gamma(f)$$

<u>Dém</u> : OPS $f = \mathbb{1}_{KgK}$ comme avant $K = \prod_v K_v$ et $K_v g_v K_v \subset G(\mathbb{Q}_v)_{reg}$.

On peut appliquer <u>la formule des traces de Lefschetz</u> à la correspondance KgK (tout est propre et lisse) :

si $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ est elliptique dans $G(\mathbb{R})$, et si $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ est non vide, on a une relation $\gamma y K = y g K \to \gamma y_v K_v = y_v g_v K_v$

$\to y_v^{-1} \gamma y_v \in G(\mathbb{Q})_{reg}$. Donc γ est régulier.

Donc <u>tous les points fixes sont isolés</u>.

Comme $$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$$

il suffit de mq

$$\sum_{z \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}} \mathrm{Loc}_z(f) = \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbb{A}_f)_\gamma)\, \mathrm{tr}(\xi(\gamma))\, O_\gamma(f)$$

On sait par ce qui précède que : $\forall z \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$,
$$\mathrm{Loc}_z(f) = \mathrm{tr}(\xi(\gamma))$$

Donc on doit calculer $\# \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$

γ régulier : γ a un seul point fixe dans X.

Donc $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ en bijection avec $G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash \{yK,\ y^{-1}\gamma y \in KgK\}$

Si $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f))$, posons

$$O_\gamma(\varphi) = \int \varphi(y^{-1}\gamma y)\, d\mu(y)$$

μ mesure de Haar normalisée pour que $\mu(K) = 1$ (?)

Prenons $\varphi = f = \mathbb{1}_{KgK}$. Alors

$$O_\gamma(f) = \mu\left(G(\mathbb{A}_f)_\gamma \backslash \{yK,\ y^{-1}\gamma y \in KgK\}\right)$$

D'où

$$\#\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}} = \mu\left(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash \{yK,\ y^{-1}\gamma y \in KgK\}\right) \quad (\text{car } \mu(K)=1)$$

$$= \mu\left(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbb{A}_f)_\gamma\right) O_\gamma(f). \qquad \square$$

2) Scholze §9

F, $\mathcal{O}$, κ — p nombre premier, F corps local (ext. finie de $\mathbb{Q}_p$), $\mathcal{O}$ anneau des entiers, κ corps résiduel.

On fixe des données entières de type PEL

B, $*$, V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $h : \mathbb{C} \to C_{\mathbb{R}} = \mathrm{End}_B(V)_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{O}_B$, Λ.

avec les conditions habituelles, notamment : B non ramifié en p.

En fait, dans le cas qui nous intéresse, on aura même :

$\exists$ $\mathbb{D}$ alg. à division, de centre $\mathbb{F}$ corps CM

tq $B = \mathbb{D}^{op}$, $V = \mathbb{D}$ (B-module à gauche pour la multiplication à droite)

de sorte que $C = \mathrm{End}_B(V) = \mathbb{D}$ algèbre à division

(donc tout sera propre, lisse, etc.)

et $F = \mathbb{F}_w$ w place de $\mathbb{F}$ au-dessus de p.

Je ne rentre pas plus dans les détails du choix de ces données (section 8 de Scholze). On y reviendra + tard. Ce qu'il faut retenir, c'est juste que l'on est assuré que tous les modèles entiers que l'on considèrera seront propres et lisses ; et que l'on choisit ces données en fonction du corps local F fixé du début (on "plonge" la situation locale dans un machin global - cf. Scholze section 10 ; pour ce que je vais raconter là, c'est inessentiel !).

Comme d'habitude, ces données déterminent (G,X) donnée de Shimura.
$\rightsquigarrow$ $(Sh_K)_{K \subset G(\mathbb{A}_f)}$ variété de Shimura

Ecorps réflex ici en fait $E = \mathbb{F}$.

(ξ, V_ξ) représentation alg de dim $< \infty$ de G ℓ-adique ou complexe
(on fixe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$)

$\rightsquigarrow$ système local $\mathcal{F}_{\xi,K}$ sur Sh_K

$$\left(\text{“} \mathcal{F}_{\xi,K} = \left((G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)) \times V_\xi \right) / K \text{”} \right)$$
(en restreint ξ à K)

On considère :
$$\tilde{H}^*_\xi = \varinjlim H^\cdot (Sh_K, \mathcal{F}_{\xi,K}) \quad \text{(cohomologie étale ou Betti, peu importe)}$$
$\circlearrowleft$ $Gal(\overline{E}/E)$

<u>Autre point de vue :</u>

$K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ cpct ouvert suffisamment petit $\Rightarrow$ modèle entier $\mathcal{M}_{K^p}$ propre, lisse

Si $K_1^p \subset K^p$ sous gr cpct ouvert, on a un revêtement étale
$\mathcal{M}_{K_1^p} \to \mathcal{M}_{K^p}$ (au niveau du pb de modules, c'est $(A, \lambda, \iota, (\overline{\eta})_1) \mapsto (A, \lambda, i, (\overline{\eta}))$)
K_1^p-orbite $\quad$ K^p-orbite

Si $K_1^p \triangleleft K^p$, c'est un revêtement étale galoisien de groupe de Galois K^p / K_1^p.

ξ comme ci-dessus. ξ donne une représentation de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ donc (projection $G(\mathbb{A}_f^p) \to G(\mathbb{Q}_\ell)$) de $G(\mathbb{A}_f^p)$, et donc par restriction une représentation ℓ-adique de K^p.

La tour de revêtements $\mathcal{M}_{K_1^p} \to \mathcal{M}_{K^p}$ décrite ci-dessus identifie K^p à un sous-groupe de $\pi_1(\overline{s}, \mathcal{M}_{K^p})$.

$\rightsquigarrow$ d'où un faisceau étale ℓ-adique local^t cst $\mathcal{F}_{\xi,K^p}$ sur

$\mathcal{M}_{K^p}$. Faisceaux compatibles quand K^p varie.

$G(\mathbb{A}_f^p)$ agit sur la tour des modèles entiers :

$g \in G(\mathbb{A}_f^p)$ $\quad \mathcal{M}_{K^p} \xrightarrow{g} \mathcal{M}_{g^{-1}K^p g}$ $\quad ((A,\lambda,\iota,\bar{\eta}) \mapsto (A,\lambda,\iota,\bar{\eta}\circ g))$

Comme précédemment, on en déduit une correspondance (de Hecke):

$$\mathcal{M}_{K^p} \xleftarrow{c_1 = p_1} \mathcal{M}_{K^p \cap gK^pg^{-1}} \xrightarrow{c_2 = p_2 \circ g} Sh_{K^p}.$$

et une correspondance cohomologique :

$$c_2^! \mathcal{F}_{\xi,K^p} \to c_1^* \mathcal{F}_{\xi,K^p}.$$

De plus, on a déjà vu que la fibre générique de $\mathcal{M}_{K^p}$ est l'union disjointe de $|\ker^1(\mathbb{Q},G)|$ copies du modèle canonique Sh_{K^p} de la variété de Shimura associée à (G,X), après extension des scalaires à $E_w = \mathbb{F}_w = F$.

Évidemment, cet isomorphisme est compatible aux faisceaux et aux correspondances définies ci-dessus.

En réalité, Scholze ne considère pas que les modèles entiers $\mathcal{M}_{K^p}$, mais aussi pour tout sous-gr compact ouvert $K_p \subset G(\mathbb{Z}_p)$ le revêtement $\mathcal{M}_{K^p,K_p}$ de $\mathcal{M}_{K^p}$ paramétrant les K_p-orbites d'isomorphismes entre $\Lambda \otimes \mathbb{Z}_p$ et T_pA, compatible à l'action de $\mathcal{O}_B$ et aux formes hermitiennes à scalaire près, i.e. le schéma représentant le problème de modules :

$$S/\mathcal{O} \mapsto \{(A,\lambda,\iota,\bar{\eta}^p,\eta_p)\}/\sim$$

avec A schéma abélien proj. $/S$ à isogénie première à p près

$\lambda : A \to A^\vee$ polarisation

$\iota : \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)$ $*_B$-morphisme avec condition de det

$\bar{\eta}^p$ structure de niveau de type K^p hors de p

η_p K_p-orbite d'iso $\Lambda \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} T_p(A)$. + structure de Drinfeld

$\mathcal{M}_{K^p,K_p}$ projectif (plus forcément lisse, a priori).

Soient $\tau \in \mathrm{Frob}^i I_F \subset W_F = W_{\mathbb{F}_w}$, $h \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Z}_p))$

$f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p))$

$f = h f^p$

On désire calculer $\mathrm{tr}(\tau \times f \mid \tilde{H}^*_\xi)$.

(rappel : $\tilde{H}^*_\xi = \varinjlim_{K} H^*(Sh_K, \mathcal{F}_{\xi,K})$)

Ceci a un sens car on a vu que $G(\mathbb{Z}_p) \times G(\mathbb{A}_f^p)$ agissait sur H^*_ξ, ainsi que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p | E_w) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p / F) \subset \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$.
Via l'isomorphisme sur la fibre générique rappelé plus haut, et les compatibilités, on est ramené à calculer la trace de $\tau \times f$ sur $H^*_\xi := \varinjlim_{K^p, K_p} H^*(\mathcal{M}_{K_p,K^p} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathcal{F}_{\xi, K_p K^p})$

(il suffira de multiplier par $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|$.)

On peut supposer les choses suivantes :

$f^p = \mathbb{1}_{K^p g^p K^p}$ $\quad g^p \in G(\mathbb{A}_f^p)$
K^p ss-gr cpct ouvert

$h = \mathbb{1}_{K_p g_p}$ $\quad g_p \in G(\mathbb{Z}_p)$
$K_p \subset G(\mathbb{Z}_p)$ ss-gr distingué

On a le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}_{K_p, K^p \cap (g^p)^{-1} K^p g^p} \arrow[dl, "\tilde{c}_1"'] \arrow[d, "\pi_{\cancel{K_p}, K^p}"] \arrow[dr, "\tilde{c}_2"] & \\
\mathcal{M}_{K_p, K^p} \arrow[d, "\pi_{K_p,K^p}"'] & \mathcal{M}_{K^p \cap (g^p)^{-1} K^p g^p} \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \mathcal{M}_{K_p, K^p} \arrow[d, "\pi_{K_p,K^p}"] \\
\mathcal{M}_{K^p} & & \mathcal{M}_{K^p}
\end{tikzcd}
$$

c_1, $\tilde{c}_1$ projections naturelles

$$\tilde{c}_2 : \mathcal{M}_{K_p, K^p \cap (g^p)^{-1} K^p g^p} \xrightarrow[\text{projection naturelle}]{} \mathcal{M}_{K_p, (g^p)^{-1} K^p g^p} \xrightarrow[\text{action de } (g_p, g^p)]{} \mathcal{M}_{K_p, K^p}$$

et de même pour c_2.

Comme vu dans la 1° partie de cet exposé, à l'action de (g_p, g^p) est associée une correspondance cohomologique :

$$u : \tilde{c}_{2!} \tilde{c}_1^* \mathcal{F}_{\xi, K_p, K^p} \to \mathcal{F}_{\xi, K_p, K^p}$$

Cette correspondance cohomologique agit sur la cohomologie (cf exposé Arigon) : on note cette application $(g_p, g^p)_*$:

$$(g_p, g^p)_* : H^\bullet(M_{K_p, K^p} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathcal{F}_{\xi, K_p, K^p}) \circlearrowleft$$

et bien sûr :

$$\mathrm{tr}(\tau \times f \mid H^*_\xi) = \mathrm{tr}(\tau \times (g_p, g^p)_* \mid H^\bullet(M_{K_p, K^p} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathcal{F}_{\xi, K_p, K^p}))$$

On va essayer de se ramener à la fibre spéciale pour pouvoir calculer cette trace (Lefschetz + Fujiwara).

Pour cela on a besoin d'un lemme :

Lemme : $\pi_{K_p, K^p *} R\psi \mathcal{F}_{\xi, K_p', K^p} \simeq \mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi\, \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$

($R\psi$ = foncteur cycles proches)

Dém. : Pour abréger, $\pi = \pi_{K_p, K^p}$ $\mathcal{F}_{\xi, K_p, K^p} = \mathcal{F}^p$, $\mathcal{F}_{\xi, K_p} = \mathcal{F}$.

$$\pi_* R\psi \mathcal{F}^p = R\psi\, \pi_* \mathcal{F}^p \underbrace{\cong}_{\text{par construction du syst. local } \mathcal{F}_\xi} R\psi\, \pi_* \pi^* \mathcal{F} \underbrace{\simeq}_{\text{formule de projection}} R\psi(\pi_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes \mathcal{F})$$

(formule de projection : $f : X \to Y$, $\mathcal{E} \in D^b_{coh}(X)$, $\mathcal{F} \in D^b_{coh}(Y)$ $\quad Rf_*(\mathcal{E} \overset{L}{\otimes} Lf^* \mathcal{F}) \simeq Rf_* \mathcal{E} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}$)

on a un morphisme d'adjonction

$$R\psi(\pi_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes \mathcal{F}_*) \to (R\psi\, \pi_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \mathcal{F}.$$

qui est un isomorphisme (voir Scholze, Lemma 9.1) $\square$

On écrit alors :

$$H^\bullet(\mathcal{M}_{K_p,K^p}\otimes\bar{\mathbb{Q}}_p,\ \mathcal{F}_{\xi,K_p,K^p}) = H^\bullet(\mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{Q}}_p,\ \pi_{K_p,K^p*}\mathcal{F}_{\xi,K_p,K^p})$$

(changement de base propre (fini même))

$$= H^\bullet(\mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p,\ R\psi\,\pi_{K_p,K^p*}\mathcal{F}_{\xi,K_p,K^p})$$

(par construction de $R\psi$ et car $\underline{\underline{\mathcal{M}_{K^p}\text{ propre}}}$)

$$= H^\bullet(\mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p,\ \mathcal{F}_{\xi,K^p}\otimes\pi_{K_p,K^p*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

(lemme)

Donc :

$$(*)\quad H^\bullet(\mathcal{M}_{K_p,K^p}\otimes\bar{\mathbb{Q}}_p,\ \mathcal{F}_{\xi,K_p,K^p}) = H^\bullet(\mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p,\ \mathcal{F}_{\xi,K^p}\otimes R\psi\,\pi_{K_p,K^p*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

Comme précédent, on a aussi des correspondances cohomologiques

$c_{2!}c_1^*\mathcal{F}_{\xi,K^p}\to\mathcal{F}_{\xi,K^p}$ induite de g^p

$c_{2!}c_1^*$ ~~$\mathcal{F}_{\xi,K^p}$~~ $\to$ ~~$\mathcal{F}_{\xi,K^p}$~~ induite de g_p

$R\psi\,\pi_{K_p,K^p*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell\to R\psi\,\pi_{K_p,K^p*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

Produit tensoriel de ces correspondances : correspondance cohomologique sur $\mathcal{F}_{\xi,K^p}\otimes R\psi\,\pi_{K_p,K^p*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Induit en cohomologie une application notée $(g_p,g^p)_*$: $H^\bullet(\mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p,\ \mathcal{F}_{\xi,K^p}\otimes R\psi\,\pi_{K_p,K^p*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)\ \circlearrowleft$

Bien sûr les deux applications $(g_p,g^p)_*$ qu'on a défini sont les mêmes, via (*) et le fait que les correspondances cohomologiques se comportent bien par spécialisation (Fargues, 6-3) et image directe.

Le schéma $\mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p$ est défini sur le corps fini $k(E_w)=\kappa$.

Correspondance de Frobenius

$$\mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p \xleftarrow{Fr^j} \mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{=} \mathcal{M}_{K^p}\otimes\bar{\mathbb{F}}_p$$

$W_{E_w} = W_F$ agit sur les cycles proches

si $\tau \in \mathrm{Frob}^j I_F$, on a donc une correspondance cohomologique :

$$\mathrm{Fr}^{j*} R\psi \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to R\psi \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

$\mathcal{F}_{\xi, K^p}$ défini sur K :

$\to$ correspondance cohomologique $\mathrm{Fr}^{j*} \mathcal{F}_{\xi, K^p} \to \mathcal{F}_{\xi, K^p}$

Produit tensoriel = correspondance cohomologique qui donne une application en cohomologie :

$$H^\bullet(\mathcal{M}_{K_p, K^p} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathcal{F}_{\xi, K_p, K^p}) = H^\bullet(\mathcal{M}_{K^p} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui est l'action de τ.

On regarde alors la correspondance composée :

$$\mathcal{M}_{K^p} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p \xleftarrow{\mathrm{Fr}^j \circ c_1} \mathcal{M}_{K^p \cap g^p K^p (g^p)^{-1}} \xrightarrow{c_2} \mathcal{M}_{K^p} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p .$$

et la correspondance cohomologique composée :

$$u : c_{2!} (\mathrm{Fr}^j \circ c_1)^* \mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell .$$

Cela donne sur la cohomologie $H^\bullet(\mathcal{M}_{K_p, K^p} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathcal{F}_{\xi, K_p, K^p}) \simeq H^\bullet(\mathcal{M}_{K^p} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ une application qui est l'action de $\tau \times (g_p \cdot g^p)_*$, dont on voulait calculer la trace (ouf !).

Maintenant, on est en mesure d'appliquer Lefschetz-Fujiwara :

<u>Thm</u> :

$$\mathrm{tr}(\tau \times h f^p \mid H^*_\xi) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{K^p \cap g^p K^p (g^p)^{-1}}(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ (\mathrm{Fr}^j \circ c_1)(x) = c_2(x)}} \mathrm{tr}(u_x)$$

avec

$\mathrm{tr}(u_x)$ = trace de u_x définie par :

$$u_x : \left(\mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi\, \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)_{(Fr^j \circ c_1)(x)} \simeq \left((Fr^j \circ c_1)^* \left(\mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi\, \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\right)_x$$

$$\to \left(p_2^* \left(\mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi\, \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\right)_x$$

$$\simeq \left(\mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi\, \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)_{p_2(x)}$$

(application du milieu induite par u

Comme les deux termes extrêmes sont les mêmes, puisque $Fr^j \circ c_1(x) = c_2(x)$, u_x est bien un endomorphisme, on peut en calculer la trace.

On peut appliquer Lefschetz - Fujiwara, car :

$M_{K^p} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ propre

c_2 fini étale → donc pas de pb avec la puissance du Frobenius dans Fujiwara

↓ donc quasi-fini

Quelques mots de la suite :

Il faut maintenant calculer les termes locaux naïfs $\mathrm{tr}(u_x)$. C'est long et difficile !

$\pi = \pi_{K_p, K^p}$

$u_x : (\mathcal{F}_{\xi, K^p} \otimes R\psi\, \pi_{K_p, K^p *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x \circlearrowleft$

On obtient : $\mathrm{tr}(u_x) = \mathrm{tr}(\underset{\in G(\mathbb{Q})}{\gamma_0} | \xi)\, \underbrace{\mathrm{tr}_x(\pi_* R\psi \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}$

= trace de l'application induite par $\tau \times h$ sur $(\pi_* R\psi \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x$

Th. de comparaison de Berkovich
+ théorème de Serre-Tate qui assure que M_{K^p} a pour complété de son anneau local en x un espace de déformations de groupes p-divisibles (avec structures additionnelles) associé au groupe p-divisible de la variété abélienne associée à $x \in M_{K^p}(\overline{k})$,

$$\widehat{\mathcal{O}}_{M_{K^p}, x} \simeq R_{\underset{\text{gp } p\text{-div}/k_r}{\underline{\overline{H}_x}}} \otimes \check{\mathcal{O}}$$

$\check{\mathcal{O}}$ complété de l'ext. max non ramifiée de $\mathcal{O}$.

$\Rightarrow \quad (\pi_* R\psi \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x \cong H^0(R\psi_{\mathrm{Spf}(R_{\overline{H}_y})} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

(de façon compatible avec toutes les actions)

δ_0 associé par la théorie de Dieudonné à $\overline{H}_x$

$\rightsquigarrow \mathrm{tr}_x(\pi_* R\psi \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \Phi_{\tau, h}(\delta_0)$ (en gros !)