Construction des fonctions $f_{\tau,h}$

Arthur-César Le Bras

5 décembre 2011

Les notations suivantes valent pour la suite de ce texte, à l'exception de la première section : le corps F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}$, d'uniformisante ϖ et de corps résiduel κ ; pour tout entier $r \geq 1$, on note F_r l'extension non ramifiée de F de degré r, $\mathcal{O}_r$ son anneau des entiers et κ_r son corps résiduel.

La correspondance de Langlands locale affirme l'existence d'une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles supercuspidales lisses de $GL_n(F)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de dimension n du groupe de Weil W_F (le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ constitué des éléments s'envoyant sur une puissance entière du Frobenius dans $\mathrm{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa)$), notée $\pi \mapsto \sigma(\pi)$.

Scholze étend plus généralement la correspondance aux représentations irréductibles lisses de $GL_n(F)$. Cela se fait de la façon suivante : soient $\tau \in W_F$ et $h \in \mathcal{C}_c^\infty(GL_n(F))$. On aimerait associer à τ et h une fonction $f_{\tau,h} \in \mathcal{C}_c^\infty(GL_n(F))$, de sorte que, pour toute représentation irréductible lisse de $GL_n(F)$ (que l'on voit comme module non dégénéré sur l'algèbre de Hecke), il existe une unique représentation de dimension n de W_F notée $\mathrm{rec}(\pi)$, telle que :

$$\mathrm{tr}(f_{\tau,h}|\pi) = \mathrm{tr}(\tau|\mathrm{rec}(\pi))\mathrm{tr}(h|\pi).$$

La représentation $\mathrm{rec}(\pi)$ est alors, à peu de choses près, la représentaion $\sigma(\pi)$ cherchée (l'introduction de la fonction "cut-off" h est une nécessité technique).

Cet exposé est consacré à la construction des fonctions $f_{\tau,h}$.

1) Un peu de théorie des déformations : le théorème d'algébrisation d'Artin

On fixe ici un schéma S localement de type fini sur un corps k (un anneau de Dedekind excellent ferait aussi l'affaire). On considère un foncteur (contravariant) F : $(Schemes/S) \to Sets$. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, on notera simplement $F(A) = F(X)$. Fixons $s \in S$, de corps résiduel $k(s)$ de type fini sur $\mathcal{O}_S$, et k' une extension finie de $k(s)$. On fixe $\xi_0 \in F(k')$.

Une *déformation infinitésimale* de ξ_0 est une paire (A, η), avec A une $\mathcal{O}_S$-algèbre artinienne locale, de corps résiduel k', et $\eta \in F(A)$ induisant ξ_0 par fonctorialité.

Une *déformation formelle* de ξ_0 est une paire $(\bar{A}, (\xi_n)_n)$, avec $\bar{A}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre noethérienne locale et complète, de corps résiduel k' et (ξ_n) une famille compatible d'éléments $\xi_n \in F(\bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$ (i.e., pour tout n, ξ_n induit ξ_{n-1}), avec ξ_0 l'élément fixé de $F(k')$.

La déformation formelle $(\bar{A}, (\xi_n)_n)$ est dite *effective* s'il existe $\bar{\xi} \in F(\bar{A})$ induisant ξ_n pour tout n (et est alors notée $(\bar{A}, \bar{\xi})$).

Une déformation formelle $(\bar{A}, (\xi_n))$ de ξ_0 est dite *verselle* (resp. *universelle*) si, pour toute déformation infinitésimale (B', η') de ξ_0, vérifiant $\mathfrak{m}_{B'}^{n+1} = 0$, et tout quotient B de B', toute application $\bar{A}/\mathfrak{m}_{\bar{A}}^{n+1} \to B$ envoyant ξ_n sur η (où η est l'élément de $F(B)$ induit par η') se factorise (resp. se factorise uniquement) à travers B, via une application $\bar{A}/\mathfrak{m}_{\bar{A}}^{n+1} \to B'$ envoyant ξ_n sur η'.

En général, on se restreint à regarder des foncteurs sur la catégorie des $\mathcal{O}_S$-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k', que l'on étend à la catégorie des $\mathcal{O}_S$-algèbres noethériennes locales complètes de corps résiduel k' en prenant une limite inductive. Dans ce cas, l'existence de déformations formelles effectives est directe. On suppose en outre en général que $F(k')$ est un singleton, de sorte que spécifier ξ_0 est superflu. Dans ce cadre, une déformation formelle *effective* $(\bar{A}, \bar{\xi})$ de ξ_0 est verselle (resp. universelle) si et seulement si le morphisme $h_{\bar{A}} \to F$ (où $h_{\bar{A}}$ est le foncteur $\mathrm{Hom}(\bar{A}, .)$) induit par $\bar{\xi}$, c'est-à-dire envoyant $f \in h_{\bar{A}}(B) = \mathrm{Hom}(\bar{A}, B)$ sur $F(\bar{\xi})(f)$, B $\mathcal{O}_S$-algèbre artinienne locale, est lisse (resp. est un isomorphisme de foncteurs, si l'on voit $h_{\bar{A}}$ et F comme des foncteurs sur la catégorie des $\mathcal{O}_S$-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k'). On rappelle qu'un morphisme de foncteurs $F \to G$ est dit lisse si l'application $F(B) \to F(A) \times_{G(A)} G(B)$ est surjective dès que $B \to A$ l'est. Lorsqu'il existe une déformation formelle effective universelle de F on dit aussi que le foncteur F est *proreprésentable* (vu comme foncteur sur la catégorie des $\mathcal{O}_S$-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k').

Le théorème de Schlessinger est un outil commode pour montrer qu'un foncteur F sur la catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathcal{O}_S$-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k' est proreprésentable. Il affirme que F est proreprésentable dès qu'il vérifie les conditions suivantes : $F(k')$ n'a qu'un seul élément ; pour tous morphismes $A \to B$ et $C \to B$ dans la catégorie $\mathcal{C}$, l'application naturelle $F(A \times_B C) \to F(A) \times_{F(B)} F(C)$ est un isomorphisme ("Mayer-Vietoris") ; $TF(k') = F(k'[\epsilon])$ est de dimension finie (la condition de Mayer-Vietoris donne un sens à cette affirmation). De plus il suffit de vérifier la condition de Mayer-Vietoris pour des morphismes $C \to B$ de noyau tué par $\mathfrak{m}_C$.

Cette formulation du théorème de Schlessinger n'est pas optimale, mais elle permet de montrer (modulo pas mal de travail...) que les foncteurs de déformations de lois de groupes formels et de groupes p-divisibles sont proreprésentables (cf. les notes de Fargues et les exposés précédents). Rappelons le résultat obtenu dans le cas des groupes p-divisibles, via le théorème de Schlessinger et la théorie de Grothendieck-Messing :

Théorème 1. *Soit k un corps parfait de caractéristique p. Soit $\bar{H}$ un groupe p-divisible sur* $\mathrm{Spec}(k)$ *de hauteur h et de dimension d. Notons $\mathcal{D}ef_{\bar{H}}$ le foncteur de déformation de la catégorie des anneaux artiniens de corps résiduel k dans celle des ensembles, qui à A associe les classes d'isomorphisme de couples (H, ρ), avec H un groupe p-divisible* *sur A, et $\rho : \bar{H} \to H \otimes_A k$ un isomorphisme. Alors $\mathcal{D}ef_{\bar{H}}$ est proreprésentable :*

$$\mathcal{D}ef_{\bar{H}} \simeq \mathrm{Spf}(W(k)[[T_1, \ldots, T_{d(h-d)}]]).$$

Revenons à la situation générale du début (F foncteur sur les S-schémas, etc.). On va voir qu'on peut dire des choses plus précises sur les déformations verselles effectives d'un foncteur, sous une hypothèse additionnelle.

Définition 1. Le foncteur F est dit *localement de présentation finie* si F commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux :

$$F(\lim_{\to} A_i) = \lim_{\to} F(A_i).$$

Remarque 1. Si F est représentable par un S-schéma X, F est localement de présentation finie si et seulement si X est un S-schéma localement de présentation finie. Cela justifie la terminologie.

Définition 2. Si s est un point de S, on appelle *voisinage étale élémentaire* de S en s un schéma S' étale sur S, muni d'un point s' au-dessus de s de même corps résiduel que s.

Théorème 2 (Artin, Theorem 1.6)**.** *On suppose le foncteur F localement de présentation finie sur S, et on suppose qu'il existe une déformation formelle verselle effective $(\bar{A}, \bar{\xi})$ de ξ_0. Alors il existe un S-schéma X de type fini, un point fermé $x \in X$ de corps résiduel $k(x) = k'$ et un élément $\xi \in F(X)$, tel que le triplet (X, x, ξ) soit une déformation verselle de ξ_0. Plus précisément, on dispose d'un isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \bar{A}$ tel que ξ induise $\xi_n \in F(\bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$ pour tout n. Cet isomorphisme est unique si $(\bar{A}, \bar{\xi})$ est universelle (i.e. si F est proreprésentable).*

Démonstration. La preuve repose sur un corollaire du théorème d'approximation d'Artin :

Théorème 3. *On suppose ici seulement F localement de présentation finie sur S. Soit s un point du schéma S, $\hat{S}$ le spectre du complété de $\mathcal{O}_{S,s}$. Soit $\hat{\xi} \in F(\hat{S})$, $c \in \mathbb{N}$. Alors il existe un voisinage élémentaire S' de S en s et $\xi' \in F(S')$ tel que $\xi' \equiv \hat{\xi} \bmod \hat{\mathfrak{m}}^c$ (ce qu'on entend par là : l'anneau local $\mathcal{O}_{S',s'}$ a aussi pour complété $\hat{S}$, d'où une flèche $F(S') \to F(\hat{S})$; on demande simplement que $\hat{\xi}$ et ξ' aient même image dans $F(\hat{S}/\hat{\mathfrak{m}}^c)$).*

Voici juste l'idée de la preuve. Notons $A = \mathcal{O}_{S,s}$, $\tilde{A}$ l'hensélisé de A, $\hat{A}$ son complété. On écrit $\hat{A}$ comme limite inductive de A-algèbres de présentation finie A_i, $i \in I$. Comme F est localement de présentaion finie, il existe i tel que $\hat{\xi}$ provient de $\xi \in F(A_i)$. Ecrivons $A_i = A[X_1, \ldots, X_n]/f$, avec $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Le morphisme canonique $A_i \to \hat{A}$ est défini par une solution $\hat{y} \in \hat{A}$ de $f(Y) = 0$. Le théorème d'approximation d'Artin fournit $\tilde{y} \in \tilde{A}$ tel que $f(\tilde{y}) = 0$ et $\tilde{y} \equiv \hat{y} \bmod \hat{\mathfrak{m}}^c$. Cet élément $\tilde{y}$ définit un morphisme $A_i \to \tilde{A}$, et on a donc un élément $\tilde{\xi} \in F(\tilde{A})$ déduit de $\xi \in F(A_i)$, qui satisfait donc la congruence $\tilde{\xi} \equiv \hat{\xi} \bmod \hat{\mathfrak{m}}^c$. Pour conclure, on utilise à nouveau le fait que F est localement de présentaion finie sur S pour conclure que $\tilde{\xi}$ provient de $\xi' \in F(S')$, avec S' un voisinage étale élémentaire convenable de S en s.

Montrons alors le théorème d'algébrisation, dans le cas où $\bar{A}$ est le complété d'un anneau local d'un S-schéma Z de type fini, en un point x (c'est le seul cas qui nous sera utile pour la suite). On applique le théorème 3 : il existe un voisinage étale élémentaire (X', x') de Z en x et $\xi' \in F(X')$, tel que $\xi' \equiv \bar{\xi} \bmod \mathfrak{m}^2$, c'est-à-dire tel que ξ' induise $\bar{\xi}_1$ dans $F(\bar{A}/\mathfrak{m}^2)$. Le complété $\hat{\mathcal{O}}_{X',x'}$ est encore isomorphe à $\bar{A}$. Posons $\varphi_1 = \mathrm{Id}_{\bar{A}/\mathfrak{m}^2}$. Soit $n > 1$ et supposons $\varphi_{n-1} : \bar{A}/\mathfrak{m}^n \to \bar{A}/\mathfrak{m}^n$, morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres, envoyant $\bar{\xi}_{n-1}$ sur ξ'_{n-1}, construit. Notons $c_n : \bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1} \to \bar{A}/\mathfrak{m}^n$ la surjection canonique. On peut alors considérer le morphisme $\varphi_{n-1} \circ c_n : \bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1} \to \bar{A}/\mathfrak{m}^n$, qui envoie $\bar{\xi}_n$ sur ξ'_{n-1}. Comme $(\bar{A}, \bar{\xi})$ est une déformation formelle verselle de ξ_0, il existe un morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres $\varphi_n : \bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1} \to \bar{A}/\mathfrak{m}^{n+1}$, telle que $\varphi_{n-1} \circ c_n = c_n \circ \varphi_n$, envoyant $\bar{\xi}_n$ sur ξ'_n. En conclusion, on a donc un morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres $\varphi : \bar{A} \to \bar{A}$, envoyant $\bar{\xi}_n$ sur ξ'_n pour tout n, et qui est l'identité modulo $\mathfrak{m}^2$. En appliquant le lemme de Nakayama au $\bar{A}$-module de type fini $\mathfrak{m}$ ($\bar{A}$ est noethérien), et en utilisant l'hypothèse que φ est l'identité modulo $\mathfrak{m}^2$, on voit que $\varphi(\mathfrak{m})$ engendre $\mathfrak{m}$. Or, si Y est un ensemble générateur de $\mathfrak{m}$, le morphisme naturel $k'[[Y]] \to \bar{A}$ est une surjection. On en déduit que φ est surjective. L'injectivité de φ se prouve en appliquant le lemme de Nakayama à $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Ainsi, (X', x', ξ') est l'algébrisation cherchée. $\square$

2) $\mathcal{O}$-modules ϖ-divisibles et espaces de déformation associés

Définition 3. Soit S un $\mathcal{O}$-schéma, sur lequel p est localement nilpotent. Un $\mathcal{O}$-module ϖ-divisbile H est un groupe p-divisible H sur S, muni d'une action $\iota : \mathcal{O} \to \mathrm{End}(H)$ telle que les deux actions induites de $\mathcal{O}$ sur l'algèbre de Lie de H coïncident.

Remarque 2. La condition de compatibilité imposée par la définition est analogue à celle que l'on a vue dans le cadre des lois de groupes formels (quand on imposait que $\mathcal{O}$ agisse par multiplication scalaire à l'ordre 1).

Faltings a étendu la théorie aux $\mathcal{O}$-modules ϖ-divisibles. On admettra tous les résultats : voir l'article de Faltings pour les preuves. En particulier, la théorie de Dieudonné se généralise à ce nouveau cadre. On peut associer à tout

$$\beta \in GL_n(\mathcal{O}_r)\mathrm{diag}(\pi, 1, \ldots, 1)GL_n(\mathcal{O}_r)$$

un $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible $\bar{H}_\beta$, de hauteur n sur κ_r, en posant $F = \beta\sigma$. Réciproquement, à tout $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible de hauteur n sur κ_r est associé une unique $GL_n(\mathcal{O}_r)$-σ-classe de conjugaison. Fixons donc de tels β et $\bar{H}_\beta$.

Comme dans le cas des groupes p-divisibles et des $\mathcal{O}$-modules formels (rappelé ci-dessus et traité dans l'exposé de P. Chojecki), on dispose du résultat suivant.

Proposition 1. *Le foncteur $\mathcal{D}ef_{\bar{H}_\beta}$ de déformation de la catégorie des anneaux artiniens de corps résiduel κ_r dans celle des ensembles, qui à A associe les classes d'isomorphisme de couples (H, ρ), avec H un $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible sur A, et $\rho : \bar{H}_\beta \to H \otimes_A k$ un* *isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules ϖ-divisibles sur κ_r, est proreprésentable par un anneau R_β. On note H_β la déformation universelle, un $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible sur R_β. L'anneau R_β est une $\mathcal{O}_r$-algèbre noethérienne locale, abstraitement isomorphe à $\mathcal{O}_r[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$.*

Au-dessus de la fibre générique de $\mathrm{Spf}(R_\beta)$, le sous-groupe ϖ^m-torsion $H_\beta[\varpi^m]$ est étale localement isomorphe à $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n$. Si x est un point de cette fibre générique, la donnée d'une *structure de niveau* m est la donnée d'un isomorphisme

$$\phi : (\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n \to H_\beta[\varpi^m](x).$$

Si x est un point quelconque, le groupe $H_\beta[\varpi^m]$ n'est plus nécessairement étale ; la bonne notion est celle de *base de Drinfeld* :

Définition 4. *Une structure de Drinfeld de niveau* m sur un $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible H de dimension 1 et de hauteur constante n finie, au-dessus d'un $\mathcal{O}$-schéma S, est un morphisme de $\mathcal{O}$-modules

$$\phi : (\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n \to H[\varpi^m](S),$$

tel que pour tout S-schéma affine $\mathrm{Spec}(R)$ et tout $f \in H^0(H[\varpi^m]_R, \mathcal{O})$, on ait l'égalité dans $R[T]$:

$$\det(T - f) = \prod_{x \in (\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h} (T - f(\phi(x))).$$

Reprenons le $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible sur κ_r $\bar{H}_\beta$ de hauteur n introduit ci-dessus. Pour une preuve du résultat suivant dans le cas formel, voir l'exposé de P. Chojecki ou l'article de M. Strauch, *Deformation spaces of one-dimensional formal groups and their cohomology.*

Proposition 2. (i) *Le foncteur $\mathcal{D}ef_{\bar{H}_\beta, m}$ de déformation de la catégorie des anneaux artiniens de corps résiduel κ_r dans celle des ensembles, qui à A associe les classes d'isomorphisme de triplets (H, ρ, ϕ), avec (H, ρ) une déformation de $\bar{H}_\beta$ et ϕ une structure de niveau m sur H (et où deux triplets (H, ρ, ϕ) et (H', ρ', ϕ') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $(H, \rho) \simeq (H', \rho')$ de $\mathcal{O}$-modules ϖ-divisibles préservant les structures de niveau) est proreprésentable par un anneau régulier $R_{\beta,m}$.*

(ii) *Pour tous $m' \geq m$, le morphisme $R_{\beta,m} \to R_{\beta,m'}$ est fini et plat, et $R_{\beta,m'}[\frac{1}{\varpi}]/R_{\beta,m}[\frac{1}{\varpi}]$ est un revêtement étale galoisien de groupe de Galois K_m/K'_m, avec $K_m = 1 + \varpi^m M_n(\mathcal{O})$ et $K_0 = GL_n(\mathcal{O})$. En particulier, pour $m \geq 1$, le revêtement $R_{\beta,m}/R_\beta$ est étale galoisien dans la fibre générique, de groupe de Galois $GL_n(\mathcal{O}/\varpi^n\mathcal{O})$.*

3) Construction des fonctions $f_{\tau,h}$

Expliquons grossièrement l'idée de la construction qui suit. Soient $\tau \in W_F$, $h \in \mathcal{C}_c^\infty(GL_n(F))$. Supposons pour un instant que τ s'envoie exactement sur l'élément de Frobenius. On considère alors $\beta \in GL_n(\mathcal{O})\mathrm{diag}(\pi, 1, \ldots, 1)GL_n(\mathcal{O})$, et on aimerait définir $f_{\tau,h}(\beta)$ (ailleurs, ce sera zéro). Ce qui précède fournit une façon géométrique de réaliser cette construction : les schémas formels $\mathrm{Spf}(R_{\beta,m})$ forment, pour m variant, un système projectif, et l'on a pour tout m une action de $GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$ compatible à la projection. La limite (inductive) des espaces de cycles évanescents ℓ-adiques (ℓ distinct de p) sur les schémas formels $\mathrm{Spf}(R_{\beta,m}$ est donc munie d'actions qui commutent des groupes $GL_n(\mathcal{O})$ et W_F, donc d'une action du produit $GL_n(\mathcal{O}) \times W_F$. On aimerait alors définir $f_{\tau,h}(\beta)$ comme (en gros) la trace de (h,τ) (où l'on voit h comme élément de l'algèbre de Hecke). Mais il faut s'assurer de l'admissibilité de l'action de $GL_n(\mathcal{O})$ et surtout de la lissité de $f_{\tau,h}$. Dans cette optique, le théorème suivant est un théorème clé de la construction.

(Pour plus de détails sur la réalisation géométrique de la correspondance de Langlands locale, et sur le rôle des cycles évanescents, voir les textes de H. Carayol, *Preuve de la conjecture de Langlands locale pour GL_n : travaux de Harris-Taylor et Henniart*, Séminaire Bourbaki, et *Cycles évanescents (en lien avec la théorie automorphe)*).

Théorème 4 (Scholze, Theorem 2.4)**.** *A tout élément*

$$\bar{\beta} \in (1+\varpi^m M_n(\mathcal{O}))\backslash GL_n(\mathcal{O}_r)\mathrm{diag}(\varpi,1,\ldots,1)GL_n(\mathcal{O}_r)/(1+\varpi^m M_n(\mathcal{O})),$$

on peut associer un schéma séparé et plat $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ de type fini sur $\mathcal{O}_r$ et de fibre générique lisse, muni d'une action de $GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m)$ et un schéma fini $Z \subset R_{\bar{\beta},m} \otimes_{\mathcal{O}_r} \kappa_r$ stable par l'action précédente, et tel que l'on dispose d'un isomorphisme $GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$-équivariant de la complétion formelle de $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ le long de Z avec $R_{\beta,m}$, pour tout $\beta \in \bar{\beta}$.

Démonstration. La théorie des schémas en groupes développée par Faltings assure que la donnée d'un tel $\bar{\beta}$ est équivalente à la donnée du $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible tronqué à l'ordre m, $H_\beta[\varpi^m]$ pour un certain β. En outre, le foncteur $H \mapsto H[\varpi^m]$ des $\mathcal{O}$-modules ϖ-divisibles dans les $\mathcal{O}$-modules ϖ-divisibles tronqués à l'ordre m, est formellement lisse, ce qui montre que $(R_\beta, H_\beta[\varpi^m])$ est encore une déformation formelle verselle du foncteur de déformation tronqué à l'ordre m. Il faut bien noter que la théorie de Dieudonné garantit que ce foncteur ne dépend que de $\bar{\beta}$. Comme ce foncteur est de présentation finie, le théorème 2 d'algébrisation d'Artin montre qu'il existe un schéma séparé $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$ de type fini sur $\mathcal{O}_r$, un $\mathcal{O}$-module ϖ-divisible tronqué à l'ordre m $\mathcal{H}_{\bar{\beta}}$ et un point fermé x de $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$ de corps résiduel κ_r, tels que le complété $\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{R}_{\bar{\beta}},x})$ de $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$ en x avec $\mathcal{H}_{\bar{\beta}}$ restreint à cette complétion, soit isomorphe à R_β avec $H_\beta[\varpi^m]$, ce pour tout $\beta \in \bar{\beta}$.

Quitte à se restreindre à un ouvert de Zariski et à normaliser, on peut supposer $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$ normal, plat sur $\mathcal{O}_r$ et de fibre générique lisse, car tout cela est vrai dans le complété en x, d'après la proposition 1. Notons (provisoirement) X la fibre générique de $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$. Considérons le foncteur qui à $Y \to X$ associe les classes d'isomorphismes de trivialisations $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n \simeq \mathcal{H}_{\bar{\beta}}[\varpi^m] \times_X Y$. Ce foncteur est proreprésentable par un revêtement étale galoisien $\tilde{X}$ de X de groupe de Galois $GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$: on le voit en écrivant qu'il existe (comme $\mathcal{H}_{\bar{\beta}}[\varpi^m]$ est étale sur la fibre générique - on est en caractéristique nulle) un revêtement étale X' de X qui trivialise $\mathcal{H}_{\bar{\beta}}[\varpi^m] \times_X X'$, et en utilisant un procédé de descente. Notons $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ la normalisation de $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$ dans le corps des fonctions de ce revêtement de la fibre générique $\tilde{X} \to X$. L'extension $K(\mathcal{R}_{\bar{\beta},m})/K(\mathcal{R}_{\bar{\beta}})$ est donc galoisienne de groupe de Galois $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$. Notons Z la préimage de x dans $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$.

La complétion de $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ en Z est alors la normalisation de la complétion de $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$ en x, complétion qui n'est autre que $\mathrm{Spf}(R_{\beta,m})$, par construction de $\mathcal{R}_{\bar{\beta}}$. Comme, d'après la proposition 2, l'anneau $R_{\beta,m}$ est régulier, donc normal, on en déduit que la complétion de $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ en Z est isomorphe à $R_{\beta,m}$, de façon $GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$-équivariante.

Enfin, comme tout à l'heure, on peut supposer $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ plat sur $\mathcal{O}_r$ à fibre générique lisse, car ces assertions sont vraies dans le complété en Z, d'après la proposition 2. $\square$

Rappelons brièvement le formalisme des *cycles évanescents* dans le cas des schémas, introduit lors des séances précédentes (et alors appelés *cycles proches*). On note S le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien, s son point fermé, η son point générique. On fixe un point géométrique $\bar{s}$ au dessus de s, un point géométrique $\bar{\eta}$ au dessus de η. Soit X un schéma de type fini sur S. On note $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \times_\eta \bar{\eta}$ et $X_{\bar{s}} = X_s \times_s \bar{s}$, et $\bar{i} : X_{\bar{s}} \to \bar{X} = X \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k^{sep}})$, $\bar{j} : X_{\bar{\eta}} \to \bar{X}$. On dispose d'un foncteur $\psi_{\eta,X}$, que l'on notera simplement ψ_X, de la catégorie des faisceaux étales sur X_η dans la catégorie des faisceaux étales sur $X_s \times_s \eta$, i.e. des faisceaux sur $X_{\bar{s}}$ avec action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ (via son quotient $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$) sur $X_{\bar{s}}$, ainsi défini :

$$\psi_X(\mathcal{F}) = \bar{i}^*(\bar{j}_*\mathcal{F}_{\bar{\eta}}).$$

Dans le cas qui nous intéresse, considérons le schéma $X = \mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ sur $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_r)$, et, pour $i \geq 0$, le groupe de cohomologie $H^0(R^i\psi_{\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}}\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{Z\otimes_{\kappa_r}\bar{\kappa}})$. C'est un espace vectoriel de dimension finie, nul si i n'appartient pas à l'ensemble $\{0,\ldots,n-1\}$: cf. Deligne, SGA 4 1/2, Th. de finitude. Par définition du foncteur cycles évanescents, cet espace vectoriel est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{F}_r/F_r)$. Par transport de structure, il est aussi muni d'une action de $GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$. Ces actions commutent entre elles. On en déduit que l'espace vectoriel $H^0(R^i\psi_{\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}}\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{Z\otimes_{\kappa_r}\bar{\kappa}})$ $(0 \leq i \leq n-1)$ est une représentation de dimension finie continue de $W_{F_r} \times GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$.

Malheureusement, cet objet n'est pas très intrinsèque. C'est ici qu'intervient naturellement le théorème de comparaison de Berkovich énoncé à la séance précédente. On renvoie à l'exposé de B. Klingler pour une formulation précise. Dans la situation que nous étudions, le théorème, combiné au théorème 4, donne que

$$R^i\psi_{\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}}\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{Z\otimes_{\kappa_r}\bar{\kappa}} = R^i\psi_{\mathrm{Spf}(R_{\beta,m})}\bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Par conséquent, l'espace $H^0(R^i\psi_{\mathrm{Spf}(R_{\beta,m})}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ $(0 \leq i \leq n-1)$ est une représentation de dimension finie continue de $W_{F_r} \times GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$.

Ainsi, pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, l'espace

$$E_i := \lim_{\to m} H^0(R^i\psi_{\mathrm{Spf}(R_{\beta,m})}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est une représentation avec action continue de W_{F_r}, et action *lisse et admissible* de $GL_n(\mathcal{O})$.

Soient alors $\tau \in W_F$ et $h \in \mathcal{C}_c^\infty(GL_n(\mathcal{O}))$, à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Choisissons $r \geq 1$ entier tel que $\tau \in \mathrm{Frob}^r I_F$, de sorte que l'on peut voir τ comme un élément de W_{F_r}. Pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, l'espace E_i est une représentation admissible de $\mathcal{C}_c^\infty(GL_n(\mathcal{O}))$. Or, h

est un élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ de $GL_n(\mathcal{O})$: on peut donc le faire agir sur E_i et il existe un sous-groupe compact ouvert K de $GL_n(\mathcal{O})$ tel que $h.E_i \subset E_i^K$. L'admissibilité de E_i garantit que ce sous-espace est de dimension finie, et on définit donc à bon droit

$$\phi_{\tau,h}(\beta) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \mathrm{tr}(\tau \times \check{h} | E_i),$$

où $\check{h}$ est définie par $\check{h}(g) = h((g^{-1})^t)$.

Théorème 5 (Scholze, Theorem 2.6)**.** *On conserve les notations du paragraphe précédent. Alors $\phi_{\tau,h} \in \mathcal{C}_c^\infty(GL_n(F_r))$, est à valeurs dans $\mathbb{Q}$, et est indépendante de ℓ.*

Démonstration. Montrons que $\phi_{\tau,h}$ est une fonction lisse de β. Fixons $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(GL_n(F_r))$. On peut supposer que $\beta \in GL_n(\mathcal{O}_r)\mathrm{diag}(\pi, 1, \ldots, 1)GL_n(\mathcal{O}_r)$ (car $\phi_{\tau,h}$ est nulle sur le complémentaire de cet ensemble, qui est ouvert). Traitons tout d'abord le cas où $\check{h}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $1 + \varpi^m M_n(\mathcal{O})$, $m \geq 1$. Alors, l'action de $\check{h}$ sur E_i est (à un facteur près) la projection sur $H^0(R^i\psi_{\mathrm{Spf}(R_{\beta,m})}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, et donc

$$\phi_{\tau,h}(\beta) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \mathrm{tr}(\tau \times \check{h} | H^0(R^i\psi_{\mathrm{Spf}(R_{\beta,m})}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

On en déduit avec le théorème 4 (où les objets construits ne dépendent que de $\bar{\beta}$, c'est le point crucial de la construction) que $\phi_{\tau,h}$ est constante sur la double classe

$$\bar{\beta} \in (1 + \varpi^m M_n(\mathcal{O}))GL_n(\mathcal{O}_r)\mathrm{diag}(\pi, 1, \ldots, 1)GL_n(\mathcal{O}_r)(1 + \varpi^m M_n(\mathcal{O}))$$

contenant β. Comme cette double classe est ouverte, on a le résultat. Dans le cas général, $\check{h}$ est combinaison linéaire de translatées de telles fonctions.

Montrons les deux autres points. Supposons que h soit la fonction caractéristique de l'ensemble des éléments de $GL_n(\mathcal{O})$ se projetant sur un $g \in GL_n(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$ donné. Tordons le schéma $\mathcal{R}_{\bar{\beta},m}$ par l'action non ramifiée de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ envoyant le Frobenius géométrique sur g. On obtient un schéma X, avec un sous-schéma fini Z, tels que :

$$\phi_{\tau,h}(\beta) = \sum_{x \in Z(\kappa_r)} \mathrm{tr}(\tau | (R\psi_X \mathbb{Q}_\ell)_x).$$

Un résultat de Mieda garantit que le membre de droite est un entier indépendant de ℓ (Y. Mieda, *On ℓ-independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields*, Theorem 6.2.2). Dans le cas général, comme h est à valeurs dans $\mathbb{Q}$, h est combinaison linéaire à coefficients rationnels de fonctions caractéristiques comme ci-dessus. □

L'analyse harmonique (cf. J. Arthur, L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*) permet d'associer à $\phi_{\tau,h}$ un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(GL_n(F))$: c'est la fonction $f_{\tau,h}$ cherchée ! Je ne détaille pas cette étape sur laquelle on aura (j'imagine) l'occasion de revenir.

Concluons par l'énoncé du théorème principal de l'article :

Théorème 6 (Scholze, Theorem 2.7)**.** (i) *Pour toute représentation irréductible lisse π de $GL_n(F)$, il existe une unique représentation de dimension n $\mathrm{rec}(\pi)$ de W_F, telle que pour tous τ et h comme ci-dessus, l'on ait*

$$\mathrm{tr}(f_{\tau,h}|\pi) = \mathrm{tr}(\tau|\mathrm{rec}(\pi))\mathrm{tr}(h|\pi).$$

On pose alors $\sigma(\pi) = \mathrm{rec}(\pi)(\frac{1-n}{2})$.

(ii) *Si π est un sous-quotient d'une induite parabolique normalisée de la représentation irréductible $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_t$ de $GL_{n_1}(F) \times \ldots \times GL_{n_t}(F)$, $\sigma(\pi) = \sigma(\pi_1) \oplus \ldots \oplus \sigma(\pi_t)$.*

(iii) *L'application $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles supercuspidales lisses de $GL_n(F)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de dimension n du groupe de Weil W_F.*

(iv) *Cette bijection est compatible aux twists, caractères centraux, duaux, L- et ϵ-facteurs de paires.*

Références.

M. Artin, *Algebraization of formal moduli : I*, Tokyo, 1969.

G. Faltings, *Group schemes with strict $\mathcal{O}$-action*, 2002.

P. Scholze, *The Local Langlands Correspondence for GL_n over p-adic fields*, Preprint, Bonn, 2010.