

• Cycles rochers et évanescents : le cas transcendant.

• le problème :

• $f: X \rightarrow S$ morphisme de schémas / $\mathbb{C}$
d'espaces analytiques complexes

Si f est propre et lisse, les $H^i(X_s, \mathbb{Z})$ ($X_s := f^{-1}(s)$, cohomologie de Betti) forment un $\mathbb{Z}$ -système local sur S : $R^i f_* \mathbb{Z}$.

Si f est seulement propre, que peut-on dire du faisceau $R^i f_* \mathbb{Z}$?

• Si $f: X \rightarrow S$ morphisme de schémas quelconques et f premier inversible sur S , on peut poser la même question pour $R^i f_* \mathbb{Z}_p$, faisceau sur S de fibre générale $H^i(X_{s-\lambda}, \mathbb{Z}_p)$.

• A la fin des années 60, Milnor s'est intéressé au problème local pour $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe analytique ayant une singularité isolée en 0.

A peu près au même moment, Grothendieck a défini les foncteurs cycles rochers $R\psi$ et cycles évanescents $R\phi$ globalisant la construction de Milnor sur $\mathbb{C}$, et défini les analogues en cohomologie étale (exposés de Deligne dans SGA 7 XIII, XIV).

• Dans cet exposé on travaillera sur $\mathbb{C}$.

- Plan :
- 1/ Cycles évanescents : la fibre de Milnor.
 - 2/ les foncteurs $R\psi$ et $R\phi$
 - 3/ Application : le théorème de monodromie locale par Grothendieck.

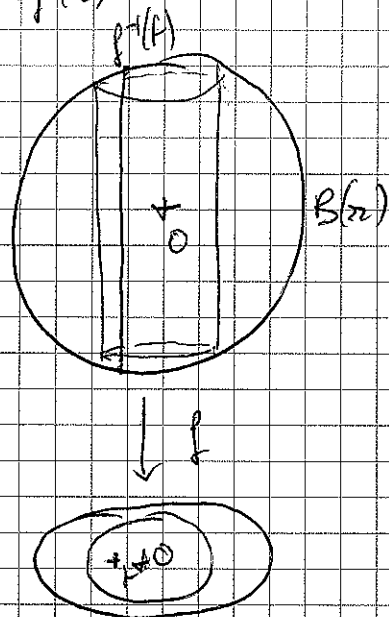
1) Fibre de Milnor

②

• $f = (f, 0) \rightarrow (C, 0)$ germe analytique

• On suppose : f a une singularité isolée en 0 i.e

$$\begin{cases} \forall z \neq 0 & df(z) \neq 0 \\ df(0) = 0 \end{cases}$$



Lemme (Threumann-Milnor) pour $0 < \rho < r$

$$f : B(r) \cap f^{-1}D^*(\rho) \rightarrow D^*(\rho)$$

est une fibration et localement triviale.

Def : $\text{Mil}_{f,0} := B(r) \cap f^{-1}(H), \quad t \in D^*(\rho)$

fibre de Milnor de f en 0

(= variété des cycles évanescents chez Deligne)

• Cas le plus simple : f a point double ordinaire

$$\Leftrightarrow \text{Hess } f(0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \end{pmatrix} \text{ non-dégénérée}$$

Rem : Un tel f s'appelle une dégénérescence de type A₁

qu'il faut changer les coordonnées : $f(z) = \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2$

(3)

Etude du type d'homotopie de $\text{Mil}_{f,0}$ dans ce cas :

$$t = s e^{i\theta} \quad (s, \theta \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \text{Mil}_{f,0} &= B(0) \cap f^{-1}(t) \\ &= \{z_1, \dots, z_n \in B(0) \mid \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = s e^{i\theta}\} \\ &\cup \end{aligned}$$

$$S^n_t = \{z_i \in \sqrt{s} e^{i\frac{\theta}{2}} z_i \mid \sum z_i^2 = 1, z_i \in \mathbb{R}\}$$

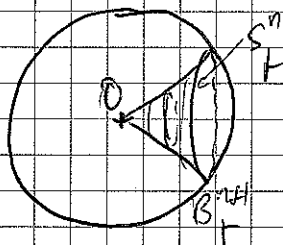
On voit facilement que $\text{Mil}_{f,0} \xrightarrow[\text{homotopie}]{\text{à } t=0} S^n_t$, donc se rétracte par déform. sur S^n_t .

Quand $t \rightarrow 0$, S^n_t se contracte sur le point $0 \in f^{-1}(0)$.

Précisément : $S^n_t = \partial B^{n+1}_t$

$$B^{n+1}_t = \{z_i \in \sqrt{s} e^{i\frac{\theta}{2}} z_i, \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 \leq 1\}$$

cône en 0 de S^n_t



Un peu de théorie de Morse montre que :

$$|B(0) \cap f^{-1}(0(p))| \stackrel{\text{retracte par déf}}{\cong} \text{Mil}_{f,0} \cup B^n_t$$

Singularités isolées quelconques

- Milnor : $\text{Mil}_{f,0} =$ bouquet de $\mu_{f,0}$ n -sphères évanescentes
le nombre de Milnor $\mu_{f,0}$ est défini par

$$\mu_{f,0} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}] / J_f$$

$$J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle \text{ idéal jacobien.}$$

- Le : cette description reste valable si on remplace $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ par un germe analytique $(X, x) \subset (B(x), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ quelconque.

Pour f a' singularités isolées en x

$f: B(x, r) \cap f^{-1}(D^*(p)) \rightarrow D^*(p)$ est une fibration loc. triviale de fibre

$$\text{Mil}_{f,x} := B(x, r) \cap f^{-1}(V) \quad 0 < |t| \ll 1.$$

- Monodromie : $f|_{f^{-1}(D^*(p))}: f^{-1}(D^*(p)) \rightarrow D^*(p)$

fibration loc. triviale sur $D^*(p)$ est donc complètement décrite par sa monodromie sur $S^1 \subset D^*(p)$

Tout relèvement à $f^{-1}(S^1)$ du champ de vecteurs $\frac{d}{dt}$ sur S^1 s'intègre en un flot et induit

$$h: \text{Mil}_{f,x} \xrightarrow{\sim} \text{Mil}_{f,x} \quad (\text{monodromie géométrique (auquel a' isotopie près)})$$

$$\text{qui induit } \pi: (h^*)^{-1}: H^*(\text{Mil}_{f,x}) \rightarrow H^*(\text{Mil}_{f,x})$$

(monodromie locale)

Comme h peut se reléver en un homéo qui est

l'identité près du bord de $Mil_{f,z}$, on voit que h -Id envoie les cycles de Borel-Moore de $Mil_{f,z}$ sur des cycles usuels (à support compact).

Donc en cohomologie :

$$var := \nabla - Id : H^q(Mil_{f,z}) \rightarrow H_c^q(Mil_{f,z})$$

(la variation)

2/ Globalisation, la foncteur RP et $R\phi$

Dorénavant : $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ variété} \\ f : X \rightarrow D, \text{ lisse sur } D^* \text{ (par réc. a')} \\ X_0 := f^{-1}(0) \end{array} \right.$ (par réc. a')
sing isolée

Ehresmann - Milnor : $f|_{f^{-1}(D^*)} : f^{-1}(D^*) \rightarrow D^*$
fibration localement triviale de fibre X_t .

$h : X_t \xrightarrow{\sim} X_t$ monodromie géométrique

Prop : * il existe une rétraction fibree $\pi : X \rightarrow X_0$ /
par déformation

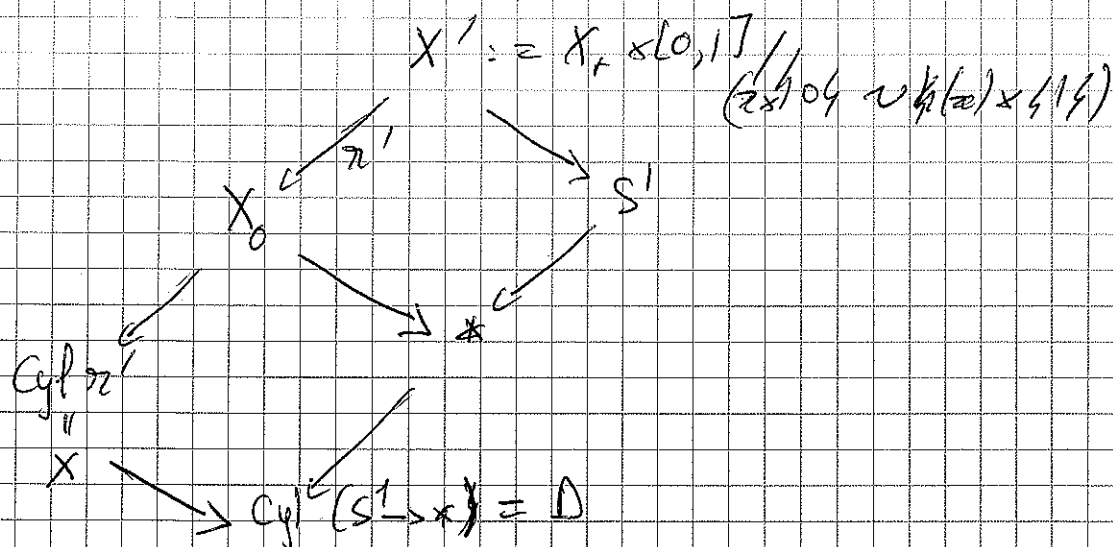
$\pi|_{X_t} : X_t \hookrightarrow X \xrightarrow{\pi} X_0$ est h -invariante

En particulier X a le type d'homotopie de X_0 .

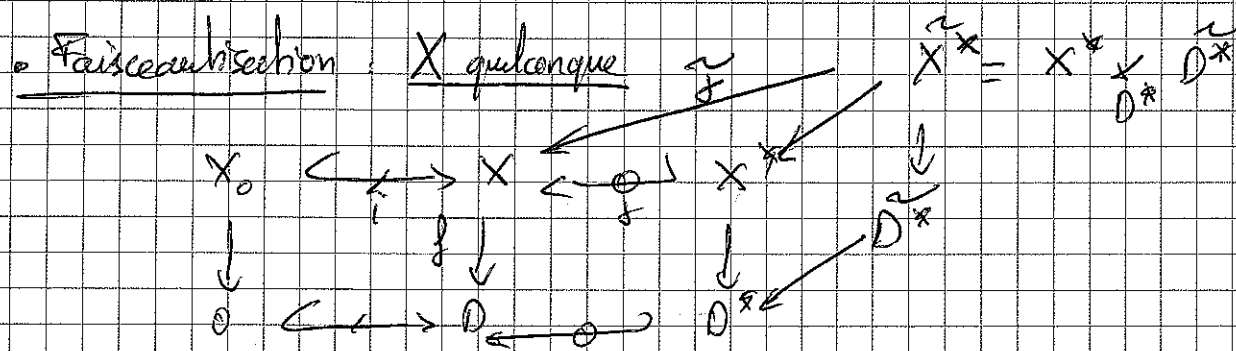
* Si f a une unique singularité isolée,

$\pi_t^{-1} \alpha \hookrightarrow Mil_{f,z}$ est une équivalence d'homotopie.

- L'application $r_f : X_f \rightarrow X_0$ est appelée spécialisation
- La donnée de (X, l) est alors équivalente à celle de (X_0, X_f, r_f, h) :



On veut comprendre $r_f^* : H^*(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_f, \mathbb{Z})$.



Def : $\mathcal{F}$ fonction cycle poché $(R)\psi : D^{(a,b)}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow D^{(a,b)}(X_0, \mathbb{Z})$
 est défini par $\psi(\mathcal{F}^\circ) = i^* R_{f*}^L(\mathcal{F}^\circ \otimes \mathcal{F})$

La monodromie géométrique $h : X_f \rightarrow X_f$, étendue en $h : X_{\mathcal{D}^*} \rightarrow X_{\mathcal{D}^*}$, induit un iso. de complexes

$$\Gamma : \psi(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \psi(\mathcal{F}^\circ)$$

• Vérifions, dans le cas où f a une singularité isolée en x , qu'on ait bien en tout point de la fibre de Hilbert :

Lemme / Si f est à sing. isolée en x
 $H^k(\psi(\mathbb{Z})_x) \cong H^k(\text{Hil}_{f,x}, \mathbb{Z})$
 ∇ compatible

Preuve : $H^k(\psi(\mathbb{Z})_x) = H^k(R_{f,x}^* (j_* \mathbb{Z}))_x$
 $= \text{colim}_{X \ni U \ni x} H^k(\Gamma_U^*(j_* \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$
 $\quad \quad \quad \text{Hil}_{f,x} \hookrightarrow H$
 $= H^k(\text{Hil}_{f,x}, \mathbb{Z})$
 $\square$

Globalement pour f propre et si $f : X^* \rightarrow D^*$ fibre
 (par exemple si X lisse) on obtient :

$$\begin{aligned} H^i(X_0, R\psi(\mathbb{Z})) &\cong \varinjlim_{X \ni U \ni x} H^i(X_U^*, \mathbb{Z}) \quad (f \text{ propre}) \\ &\cong H^i(X_f, \mathbb{Z}) \quad \left(\begin{array}{l} p : X^* \rightarrow D^* \text{ fibre} \\ \text{Leray } X_U \rightarrow \overline{U^*} \end{array} \right) \end{aligned}$$

• Si on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{F}^\circ \in D^+(X, \mathbb{Z})$ quelconque, on voit en considérant la suite spectrale de Leray que

$$H^i(X_0, R\psi(\mathbb{F}^\circ)) \cong H^i(X_f, \mathbb{F}^\circ) \text{ dès que :}$$

(*) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, D^* est recouvert par des ouverts tels qu'il existe un isomorphisme $f : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} Y \times V$
 $\quad \quad \quad p \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad U \hookrightarrow D^* \hookrightarrow \mathbb{P}^2$

• Soit un faisceau $\mathcal{G}$ sur X / $H^i(F^\bullet) \simeq \mathcal{O}^* \otimes \mathcal{P}_1^* \otimes \mathcal{G}$ (8)

• Rappelons que $F^\bullet \in D^+(X, \mathbb{Z})$ est dit constructible si

- il existe une stratification $F^\bullet X$ par des fermés analytiques
- $\mathcal{H}^i(F^\bullet)_{|F^i - F^{i+1}}$ est un $\mathbb{Z}$ -syst. local de fibre un $\mathbb{Z}$ -module de type fini.

• Prop : Soit $F^\bullet \in D_c^+(X, \mathbb{Z})$ (sous-catégorie triang. pleine engendrée par les constructibles)
alors $F^\bullet$ satisfait (*)
En particulier
$$H^i(X_0, \psi_! (F^\bullet)) \simeq H^i(X_\infty, F^\bullet).$$

C'est une conséquence du

Théorème d'isotopie de Thom :

$f : X \rightarrow D$ propre entre espaces analytiques ($D \simeq \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}K$)
Quitte à remplacer D par un disque + point, il existe une stratification Σ de $X^* = f^{-1}(D^*)$ /

(a) Σ est une filtration

$$X^* = \Sigma_0 \supset \Sigma_1 \supset \dots \supset \Sigma_n \supset \Sigma_{n+1} = \emptyset \text{ de } X^*$$

par des fermés fermés analytiques $\Sigma_i \subset X$

(b) $\Sigma_i - \Sigma_{i+1}$ est lisse sur D^*

(c) Σ vérifie les conditions (a) et (b) de Whitney.

De plus si $\mathcal{G}_i \subset X$ est une famille finie de sous-espaces analytiques fermés de X , et quitte à choisir D davantage, on peut trouver Σ / $X \setminus \bigcup \mathcal{G}_i = \emptyset$.

• Si $\varphi: X \rightarrow Y$ et $G \in D_c^b(Y)$ $\left\{ \begin{array}{l} p^* G \in D_c^b(X) \\ f_! G \end{array} \right.$

Si $\varphi: \text{supp } F \rightarrow X$ et propre $Rf_* (F)$ et $Rf_! (F) \in D_c^b(X)$
 $\left| \begin{array}{l} F \in D_c^+(X) \end{array} \right.$

• Si $f = \text{supp } f^+ F \rightarrow X$ n'est pas propre mais on peut montrer que

$$\Psi_f: D_c^+(X) \rightarrow D_c^+(X_0)$$

Théorème : la catégorie naturelle de faisceaux avec laquelle travailler est celle des faisceaux constructibles.

• L'adjonction naturelle $F^0 \rightarrow \text{pro } j^* F$ induit

$$\left| \begin{array}{l} \text{sp} : i^* F \rightarrow \Psi_f(F) \text{ dans } D_c^+(X_0) \\ \text{appelée spécialisation.} \end{array} \right.$$

Def : le foncteur $\Phi_f: D_c^+(X, \mathbb{Z}) \rightarrow D_c^+(X_0, \mathbb{Z})$
 $F^0 \mapsto \text{cone}(\text{sp})$
 est appelé foncteur cycles évanescents.

On a donc un triangle exact

$$i^* F \rightarrow \Psi_f(F) \rightarrow \Phi_f(F) \xrightarrow{+} 1$$

dans $D_c^+(X_0, \mathbb{Z})$

qui induit une SEL

$$\dots \rightarrow H^i(X_0, F^0) \rightarrow H^i(X_0, \Psi(F)) \rightarrow H^i(X_0, \Phi(F)) \rightarrow \dots$$

• Monodromie : $T \circ sp = sp$ donc il existe une monodromie induite $\phi_p(F) \rightarrow \phi_p(F)$, non canonique

Pour la définir canoniquement on procède ainsi :

$$\psi_f : D_c^+(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow D_c^+(X_0, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

où t agit via T

$$\gamma^* F \in D_c^+(X_0, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \text{ (action inversée)}$$

On prend $\phi_p(F)$ dans $D_c^+(X_0, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ qui définit l'action de monodromie T uniquement à l'isopros

• Variation : $T = \text{Id}$ sur $\mathcal{H}_p(b)$ et de composé nul donc
 $\text{Var } T : \mathcal{H}_p(b) \longrightarrow \mathcal{H}_p(b)$.

3/ le théorème de monodromie locale

Thm : $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ propre, lisse en D^* (X non nécessairement lisse)
 $\exists$ a entier ≥ 1 / $(r-1) \leq a-1$ $H^i(X_r, \mathbb{Z}) = 0$ si

La première preuve de ce théorème semble due à Grothendieck; de nombreuses autres ont suivi. Ce résultat semble avoir été complété par Deligne.

Preuve Hironaka : on peut supposer X lisse
 (cf. Illusie) X_0 diviseur à croisement normal

donc, localement au vois. de $z_0 = (z_1, \dots, z_n) \in X_0$,
 $f(z_1, \dots, z_n) = z_1^{e_1} \cdots z_n^{e_n}$

On a $H^i(X_0, \mathcal{H}_p(\mathbb{Z})) \cong H^i(X_r, \mathbb{Z})$
 comme T -module

• Écrivons la suite spectrale d'hypercohom. associés (dite suite spectrale des cycles évanescents) :

$$E_{\mathbb{Z}}^{pq} = H^p(X_0, R^q \psi(\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X_t, \mathbb{Z}).$$

qui est Γ -équivariante.

Il suffit donc de prouver : $\forall q \quad \exists a \geq 1 \quad \Gamma^a | R^q \psi(\mathbb{Z}) = \text{Id}$

On est donc ramené à un énoncé local (c'est ce qui fait la beauté de cette preuve) en X_0 : on peut supposer que X est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{A}^n$ et que

$$f(z_1 \rightarrow z_n) = z_1^{e_1} \cdots z_n^{e_n} \\ X_0 = \sum_{i=1}^n e_i D_i \quad \text{ou} \quad D_i = (z_i = 0).$$

Montrons que $e = \text{ppcm}(e_i)$ convient.

Soit $x \in X_0$ et $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x \in D_i\}$.

Il suffit de montrer $\Gamma^e | R^q \psi(\mathbb{Z})_x = \text{Id} \quad \forall q, \quad e = \text{pgcd}(e_i)$

Quitte à remplacer z_i par $u_i z_i$, u_i unités, on peut supposer que dans un voisinage de x est $f(z) = \prod_{i \in I} z_i^{e_i}$ et $I = \{1, \dots, n\}$

$$R^q \psi(\mathbb{Z})_0 = H^q(\text{Hilb}_{p,0}, \mathbb{Z})$$

$$\text{Hilb}_{p,0} \cong \left\{ (z_1 \rightarrow z_n, u) \in \mathbb{C}^{n \times 1} \times \text{Im} u > 0 \mid \begin{matrix} z_1^{e_1} \cdots z_n^{e_n} = e^{2\pi i u} \end{matrix} \right\}$$

$$\Gamma : u \mapsto u+1$$

$$\cong \coprod_{0 \leq k < e} F_k \quad \left| \quad F_k = \begin{matrix} z_1^{e_1} & z_n^{e_n} \\ \vdots & \vdots \end{matrix} = \sum_k e^{\frac{2\pi i k}{e}} \right.$$

ou $\sum = e^{2\pi i k/e}$
et $e_i = e_i/e$.

$\mathbb{Z}$
analyt.

$$\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \times \mathbb{F}_0$$

$\mathbb{Z}$
homotop.

$$\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \times V$$

ou V est le bore

$$1 \rightarrow V \rightarrow (S^1)^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^1 \rightarrow 1$$

$$z_i \rightarrow \pi z_i e_i$$



$$T: n \rightarrow n+1$$

Donc $T^2 \cong \text{Id}$ sur $H^*(Hil_{p,0}, \mathbb{Z})$

$$T: n \rightarrow n+1$$

Précisément on trouve :

$$R^q \psi(\mathbb{Z})_0 = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}] \otimes H^q(V, \mathbb{Z})$$

$$H^q(V, \mathbb{Z}) = H^q(V, \mathbb{Z})$$

$$H^1(V, \mathbb{Z}) = \text{Coker} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

□