Exposé : Formes automorphes.

Notaⁿ :

$G_{\mathbb{Q}}$ connexe réductif sur $\mathbb{Q}$. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ alg enveloppante, $\mathcal{Z}$ son centre.

$G := G(\mathbb{R})$. K compact max de G.

$\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ ss-gpe arithmétique $\rho : G \longrightarrow GL_n$.

$\|g\| = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\rho(g)^t \rho(g)\right)}$ $g(\alpha * f) := (\rho(g)\alpha * f)$

$\theta : \frac{Z(\mathbb{R})}{\Gamma \cap Z(\mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ caractère unitaire.

0. Prolégomènes sur les ensembles de Siegel et décompositⁿ en H gene

Soit $P \subsetneq G$ un parabolique défini sur $\mathbb{Q}$.

alors $P = MAN$ t.q A tore déployé sur $\mathbb{Q}$.

+gd gpe anisotrope connexe/$\mathbb{Q}$ ← $M = Z_G(A)$. N radical unipotent

(décompositⁿ de Langlands)

LASSE :

Th : (i) G admet un paraboliq propre déf sur $\mathbb{Q}$.

$\Longleftrightarrow$ (ii) G admet un tore déployé non central sur $\mathbb{Q}$. (i.e $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}} G > 0$)

Rmq : a) si $\mathrm{rang}_{\mathbb{Q}} G = 0$ G est dit anisotrope.

(b) Si on est dans les hyp de (i), $P/\mathbb{Q}$ conj à un P_θ. (une fois P_0 choisi)

S tore décomposé maximal de P.

Z H(p/C   Ensemble de Siegel : $P \subset \mathbb{R}$. P paraboliq minimal $P = MAN$.

Un ensemble de Siegel $\mathfrak{S}$ de G est un ensemble produit

$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{t,\omega} = K A_t \omega$ (K, P, S)

où ω voisinage compact de $M(\mathbb{R})U(\mathbb{R})$

et $A_t = \{ a \in A(\mathbb{R}) \mid \alpha(a) \leq t \ (\alpha \in \Delta)\}$ Δ F-racines simples de G p/r à S

Th : Γ ss-gpe arithmétique. $\exists\ \mathfrak{S}$ rel(K,P,S) et $C \subset G(\mathbb{Q})$ finie tels que $\Omega = \mathfrak{S} C$ soit fondamental pour Γ i.e

(i) $G = \Omega \Gamma$ +...

De plus, si $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(G) = 0$ G/Γ compact et si $X(G)_{\mathbb{Q}} = \{1\}$

$\mathrm{vol}\left(\frac{G(\mathbb{R})}{\Gamma}\right) < +\infty$

Rmq : si G ss $\mathrm{vol}\left(\frac{G(\mathbb{R})}{\Gamma}\right) < +\infty$.
b) si G connexe red$/\mathbb{Q}$ $\mathrm{vol}\left(\frac{G(\mathbb{R})}{Z^d(\mathbb{R})\Gamma}\right) < +\infty$.
si Z^d déployé $/\mathbb{Q}$.
(c) si N unipotent$/\mathbb{Q} \subset G$ $\frac{N(\mathbb{R})}{\Gamma \cap N(\mathbb{R})}$ est compact.

(d) $\Gamma \backslash G(\mathbb{Q}) / P(\mathbb{Q})$ est fini.
classifiés

Donc si on considère les parabolig $G(\mathbb{Q})$ conj à $P_{\mathbb{Q}}$ fixé :
$\Rightarrow$ nombre fini de $\mathbb{Q}$-groupes paraboliques modulo conjugaison par Γ.

I Formes automorphes pour $G(\mathbb{R})$

notée G par la suite. (Γ arithm.)

1 Définitions

Déf : f est à croissance modérée si $\exists C, r$ t.q $\forall x \in G$, $|f(x)| \leq C \|x\|^r$.

Si $f \in C^\infty(G)$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur $C^\infty(G)$ par :
$$X.\, f(g) = \frac{d}{dt}\left(f(g\exp(tX))\right)\Big|_{t=0}$$

Soit $\sigma : K \longrightarrow V$ rep de dimension finie,
et $\chi : \mathcal{Z} \longrightarrow V$ t.q $\chi(z)$ commute à $\sigma(k)$.

(H.C) **Déf** : On déf l'espace $\mathcal{A}(G/\Gamma, \sigma, \chi)_\theta$ comme l'ensemble des f° $f \in C^\infty(G, V)$ t.q :
(i) f à croissance modérée.
(ii) $\exists$ $\theta : \frac{Z}{Z \cap \Gamma} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ unitaire $f(zg) = \theta(z)\, g$. $z \in Z, g \in G$
(iii) $\forall k \in K$, $f(kx) = \sigma(k) f(x)$.
(iv) $\forall z \in \mathcal{Z}$, $zf = f\,\chi(z)$ $\quad (x \mapsto f(x)\chi(z))$.

Rmq : En considérant $x \mapsto (f(x), v)$ pour $v \in V$.

on obtient une forme automorphe ϕ dite scalaire K-finie (à gauche) et $\mathfrak{z}$-finie
(Rcpq : si on partait de ϕ scalaire en considérant $\mathfrak{Z}\phi$ et $K\phi$ on obtient les représentations) $\Rightarrow$ remplacer (ii) et (iii) par (ii)' et (iii)'.

2) $|f|$ induit une forme automorphe sur $\frac{G}{Z\Gamma}$ $\Rightarrow$ on se ramènera à G s.s.

Proposition : Soit f une f° sur G. K-finie à gauche (resp à droite) et $\mathfrak{Z}$ finie. Alors f est (analytique réelle) lisse.

Th (Harish-Chandra) : $f \in C^\infty(G)$ K-finie et $\mathfrak{z}$-finie. alors $U(\mathfrak{g}).f$ admissible pour K et G invariant.
i-e $\forall \chi \in \hat{K}$ $V_\chi = \{v \in V \mid \pi_k v = \sigma(k).v,\ k\in\}$ est de D.F

Cor : Soit $I_c^\infty(G) = \{\alpha \in C_c^\infty(G) \mid \alpha(kxk^{-1}) = \alpha(x)\}$.
Soit f ĉ ci-dessus et U voisinage de l'identité.
$\exists\, \alpha \in I_c^\infty(G)$ à support dans U t.q $f = f * \alpha$.

Preuve: $f = \sum_{i=1}^r f_i \in \bigoplus_{i=1}^r V_{\sigma_i}$ f_i de type σ_i. ces esp st de D.F

et $\forall \alpha \in I_c^\infty(G)$, $\alpha * f \in \bigoplus_{i=1}^r V_{\sigma_i} = L \subset C^\infty(G)$.
~~les convolutions~~
On obtient $T : I_c^\infty(U) \longrightarrow \operatorname{End} L$
$$\alpha \longmapsto [\phi \mapsto \phi * \alpha]$$
Son image W est de D.F donc fermé.
α_n δ séquence dans $I_c^\infty(U)_n$ alors $f*\alpha_n \to f$ ~~evu~~
t.q $T(\alpha_n) \to \mathrm{Id}$. ~~[illegible]~~
et ĉ W est fermé, $f \in W$ $\square$.

Déf : On déf l'espace $L^2\left(\frac{G}{\Gamma}\right)_\theta$ ĉ les f° f, θ-équiv et telles que $|f| \in L^2\left(\frac{G}{Z\Gamma}\right)$

Déf : On appelle ~~l'~~ **espace de f^o cuspidales** l'espace $L^2_{cusp}(G/\Gamma)_\theta$ des f^o f telles que :

(i) $f \in L^2(G/\Gamma)_\theta \;(\cap L^1_{loc}(G/\Gamma))$

(ii) $\forall\, P/_\mathbb{Q}$ parabolique strict de G, $\displaystyle\int_{N\cap\Gamma \backslash N} f(xn) = 0$ pour presque tt $x \in G$.

Rmq : Il suffit de vérifier (ii) pour $P/_\mathbb{Q}$ parabolique maximal.

On a une rep unitaire R de G sur $L^2(G/\Gamma)$ donnée par : $(R(g)f)(y) = f(g^{-1}y)$. On note R^o sa restrict° à $L^2_{cusp}(G/\Gamma)_\theta$

Th 1 : $L^2_{cusp}(G/\Gamma)_\theta$ admet $\forall \alpha \in C_c^\infty(G)$, $R^o(\alpha)$ comme opérateur compact.

où $R(\alpha)f = \alpha * f = \int_G \alpha(g)\, R^o(g) f\, dg$. $\quad f \in L^2_{cusp}(G/\Gamma)_\theta$

Th 2 : $\dim \mathcal{A}(G/\Gamma, \sigma, \chi)_\theta < +\infty$.

2 Inégalités en tous genres

Pour $G/_\mathbb{Q}$, A_G + grand tore central.

$\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X(G)_\mathbb{Q}, \mathbb{R})$. $H_G : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathfrak{a}_G$.

déf par $\langle H_G(x), \chi\rangle = |\log \chi(x)|$ $\quad x \in G(\mathbb{A}),\ \chi \in X(G)_\mathbb{Q}$.

$P/_\mathbb{Q}$ $\quad P = MAN$. $\quad$ $\mathfrak{S}$ ens de Siegel p/r à $P_0 = M_0A_0N_0$ par min $/\mathbb{Q}$

$H_P : P(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{a}_P$.

$H_P(man) = H_M(m)$ $\qquad G = \mathfrak{S}\,\Xi\,\Gamma$

Lemme A : f sur G/Γ LASSE st équiv.

(i) $\exists\, c, r \;/\; |f(x)| \le c\|x\|^r$ $\quad x \in G$.

(ii) $\exists\, c', \lambda \in \mathfrak{a}_P^* \;/\; e^{\Delta(H(x))}\,|f(x\xi)| \le c'\, e^{\lambda(H(x))}$ $\quad x \in \mathfrak{S},\ \xi \in \Xi$.

Exposé (Suite) - Formes automorphes.

Lemme B (HC. IHES) $\forall t > 0$, $G_t = \{x \in G \,/\, \|x\| \leq t\}$.
alors $\exists\, c, N \,/\, vol(G_t) \leq c\, t^N$.

Preuve: esquisse utiliser décomp d'Iwasawa.
$\|xk\| \asymp \|x\|$ $(x \in G,\ k \in K)$.
$\Rightarrow$ regarder $\displaystyle\int_{(NA)_t} a^{-2\rho}\, da\, dn$ $\qquad (NA)_t = G_t \cap NA$

Cor B: Si $\Gamma_t = \Gamma \cap G_t$
$$\# \Gamma_t \leq c'\, t^N \qquad (t > 0).$$

Preuve: U vois compact sym de 1 t.q
$$\Gamma \cap U.U = \{1\}.$$
alors $\forall \sigma \in \Gamma$, les $\sigma.U$ disjoints, $r = \sup_{x \in U} \|x\|$. Si $\sigma \in G_t$,
$\sigma.U \in G_{t.r}$
$$\Rightarrow \quad \#(\Gamma \cap G_t) \leq \underbrace{c'(tr)^N}_{c_2'' t^N} \quad \text{par Lemme B}.$$

Lemme C: $\alpha \in L^\infty_c(G)$, $\exists\, c_1, N_1 \,/$ et N_1 indép de α.
$$\Big|\sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha(x\gamma y)\Big| \leq c\, \|x\|^{N_1} \quad x, y \in G.$$

Preuve: O.p.s $\alpha = 1\!\!1_\Omega$ Ω compact.
$\Big|\sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha(x\gamma y)\Big| = \#(\Gamma \cap x^{-1}\Omega y^{-1})$ Si $\gamma, \gamma_0 \in \Gamma \cap x^{-1}\Omega y^{-1}$

$\gamma\gamma_0^{-1} \in \Gamma \cap x^{-1}\Omega\Omega^{-1}x$ donc $\#(\Gamma \cap x^{-1}\Omega y^{-1}) \leq \#(\Gamma \cap x^{-1}\Omega\Omega^{-1}x)$

maintenant $\Omega\Omega^{-1} \subset G_b$ pour un certain b, donc $x^{-1}\Omega\Omega^{-1}x \subset G_{b\|x\|^M}$

d'où $\Big|\sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha(x\gamma y)\Big| \leq \#\Gamma_{b\|x\|^M} \leq c_2\, \|x\|^{MN}$ par Cor B. $\square$

Cor C: $\alpha \in L^\infty_c(G)$, $\varphi \in L^1(G/\Gamma)$
$\forall x \in G$, $|\alpha * \varphi(x)| \leq c\, \|x\|^N\, \|\varphi\|_1$

Preuve : $|(\alpha * \varphi)(x)| \leq \int_G |\alpha(xy^{-1}) \varphi(y)| dy = \int_{\Gamma \backslash G} |\sum_{\gamma \in \Gamma} (\alpha\, x \gamma y^{-1})| \, |\varphi(y)| dy$

$\leq c \|x\|^{N_1} \|\varphi\|_1$ $\square$

(Lemme C)

Familles de semi-normes

$g \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, on définit $\nu_{g,\lambda}$ sur $C^\infty(G)$ par :

$$\nu_{g,\lambda}(f) := \sup_{x \in \mathcal{S}} |f(g;x)| e^{\lambda(H(x))}.$$

Notation : $f(g;x) = (gf)(x)$ $\quad g \in \mathfrak{g}, x \in G$,

$f(x;g) = (f_\rho(g))(x)$

On définit $\mathcal{L}(\lambda_0) := \{ f \in C^\infty(G/\Gamma) \,/\, \nu_{g,\lambda}(f) < +\infty \; \forall g \in \mathfrak{g} \}$.

$\mathcal{L}(\lambda_0)$ topo donnée par ces familles de semi-normes.

$\mathcal{L}$ idem sf topo donnée p^r $\nu_{g,\lambda}$ $\forall g \in \mathfrak{g}, \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*$.

Soit $\alpha \in \Delta$ $\quad V = U_{c\{\alpha\}}$

$G = \mathcal{S}\, \Xi\, \Gamma$ $\qquad \boxed{f_\xi(x) := f(x\xi)}$

$$\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma, \lambda) = \{ f \in C^\infty(G/\Gamma) \,/\, f_\xi \in \mathcal{L}(\lambda) \;\; \xi \in \Xi \}$$

$$\mathcal{A}(G/\Gamma, \lambda) = \{ \text{——} C(G/\Gamma) \,/\, \sup_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ \theta \in \Xi}} |f_\xi(x)| e^{\lambda(H(x))} < +\infty \}$$

$$\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma) = \{ f \in C^\infty(G/\Gamma) \,/\, \exists r \,/\, \forall g \in \mathfrak{g} \; \sup_{x \in G} |f(g,x)| \|x\|^{-r} < +\infty \}$$

$$\mathcal{A}(G/\Gamma) = \{ f \in C(G/\Gamma) \,/\, \sup_{x \in G} |f(x)| \|x\|^{-r} < +\infty \}$$

Formes automorphes (2^e Suite)

Lemme E: $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*$ $g \in \mathfrak{g}$. $\exists\ \nu$ semi-norme c^0 sur $\mathcal{L}(\lambda_0)$ t.q.
$$\nu'_{g,\lambda}(f) \leq \nu'(f) = \sup_{\xi \in \Xi} \nu(f_\xi) \quad \forall f \in {}^0\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma, \lambda_0)$$

Preuve: Lemme D pour ${}^0\mathcal{L}(\lambda_0)$.

Lemme F: Soit $\alpha \in C_c^\infty(G)$, $f \in L^2_{cusp}(G/\Gamma)_\theta$. Alors $\alpha * f \in {}^0\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma)$

De +, pour $g \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\exists\ \sigma$ semi-norme sur $C_c^\infty(G)$ t.q.
$$\nu'_{g,\lambda}(\alpha * f) \leq \sigma(\alpha)\, \|f\|_2 \quad \forall \alpha, f.$$

Z

G red.

Preuve: Soit $\Omega \subset G$.

En appliquant à $1\!\!1_\Omega$ le cor C on a :
$$|(\alpha * f)(x)| \leq C\|\alpha\|_\infty \|x\|^N \|f\|_1 \quad \forall\ \alpha \in C^\infty_\Omega(G), f \in L^1(G/\Gamma)$$

$$\left(\alpha * f \int_G |\alpha(xy^{-1})\, 1\!\!1_\Omega(xy^{-1})\, f(y)|\, dy \quad \ldots \right)$$

De +, τ vol $(Z.\Gamma\backslash G) < +\infty$.
$$\|f\|_1 \leq C\|f\|_2 \quad . \quad \text{Si } g \in \mathfrak{g}.$$

$|(\alpha * f)(g;x)| = |\rho(g)\alpha * f(x)|$ et par ci-dessus on a.
$$\leq C'' \|\rho(g)\alpha\|_\infty \|x\|^N \|f\|_1 \quad \forall \alpha \in C^\infty_\Omega(G)$$
$\Rightarrow \alpha * f \in \mathcal{A}^\infty(G/\Gamma)_\theta$. Comme $(\alpha * f)_P = \alpha * f_P$, $\alpha * f \in {}^0\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma)$
si $f \in L^2_{cus}(G/\Gamma)_\theta$

vérifier ce calcul.

Par le lemme A, $\exists\ \lambda_0 \in \mathfrak{a}^* /$ $\sup_{x \in \mathfrak{S}} \|x\|^N e^{-\lambda_0 H(x)} < \infty$.
$\Rightarrow \nu'_{g,\lambda_0}(\alpha * f) < +\infty \quad \forall g$

et $\alpha * f \in {}^0\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma, \lambda_0)$

Par le lemme E, $\exists\ \nu$ semi-norme sur $\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma, \lambda_0)$ t.q.

$\nu'_{g,\lambda}(\alpha * f) \leq \nu(\alpha * f)$. Maintenant, on a :

$$\nu'_{g,\lambda}(\alpha * f) \leq \nu(\alpha * f) \leq \sum_i^r \nu'_{g_i,\lambda_0}(\alpha * f) \leq C \sum_i^r \|(g_i)\alpha\|_\infty \sup_{\substack{x \in \mathcal{J} \\ \xi \in \Xi}} (\|x\xi\|^N e^{\lambda_0 H(x)}) \|f\|_2$$

$$\leq \tilde{C} \sum_{i=1}^r \|(g_i)\alpha\|_\infty \|f\|_2$$

pour un nbre fini de $g_i \in \mathfrak{g}$ □.

Preuve Piatetski-Shapiro

$\alpha \in C_c^\infty(G)$. Par le lemme F

$$\sup_{x \in G} |(\alpha * f)(x)| \leq C \|f\|_2 \qquad f \in {}^\circ L^2(G/\Gamma)_\theta$$

$f \mapsto f * \alpha$ f° lin c° sur ${}^\circ L^2(G/\Gamma)_\theta$.

d'où $(\alpha * f)(x) = (k_x, f)$

et $\|k_x\|_2 \leq C$ $\qquad [(k_x, k_x)^2 \leq C \|k_x\|_2]$

Si $k(x,y) = k_x(y)$

$$\iint |k(x,y)|^2 \leq \int \|k_x\|_2^2 < +\infty$$

d'où $R^\circ(\alpha)$ H-S donc compact. □ $\qquad R(g * \bar{g})$

Cor. : $L^2_{cusp}(G/\Gamma)_\theta$ se décompose en une somme ⊥ de rep irr à multiplicité finie

3. Théorème de Harish-Chandra

Lemme (Godement) : X loc^t compact t.q $\mu(X) < +\infty$. $\mathcal{H} \subset L^2(X, \mu)$ ss esp fermé de f° essentielle^t bornées sur X. Alors $\dim \mathcal{H} < +\infty$.

Preuve: $\|f\|_2 \leq \mu(X) \|f\|_\infty$

donc $id : (\mathcal{V}, \|.\|_\infty) \to (V, \|.\|_2)$ bij c° d'où l'inverse c°

et $\|f\|_\infty \leq K \|f\|_2$

$v_1 \dots v_n$ des vecteurs ⊥ de V. $a_i \in \mathbb{C}$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i v_i(z)\right| \leq K \|\Sigma a_i v_i\|_2 = K\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ pour presque $\forall z$.

$$a_i = \overline{v_i(z)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |v_i(z)|^2 \leq K\left(\sum_{i=1}^{n} |v_i(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_z n \leq K^2 \mu(z)$$

et $\dim V \leq K^2 \mu(z)$ $\square$.

<u>Proposition</u> a) $L^p\left(\Gamma\backslash G\right) \subset L^1\left(\Gamma\backslash G\right)$ et $L^p_{cusp}\left(\Gamma\backslash G\right)$ fermé dans $L^p\left(\Gamma\backslash G\right)$

a) Par Hölder

$$\int_{\Gamma\backslash G} |f| \leq \left(\int_{\Gamma\backslash G} d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{\Gamma\backslash G} |f|^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \|f\|_1 \leq C^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

b) $P/_{\mathbb{Q}}$ un parabolique. Il suffit de le faire pour $p=1$ d'après a).

$\varphi \in C^\infty_c\left(N\backslash G\right)$.

$$\lambda_{P,\varphi}(f) = \int_{N\cap\Gamma\backslash G} f(x)\varphi(x)\, dx$$

$$\lambda_{P,\varphi}(f) = \int_{N\backslash G} \varphi(\bar{x})\, d\bar{x} \int_{N\cap\Gamma\backslash N} f(nx)\, dn = \int_{N\backslash G} \varphi(\bar{x}) f_P(\bar{x})\, d\bar{x}$$

$\bar{x}$ projection de $G/N \leftarrow N\cap\Gamma\backslash G$.

$f_P = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in C^\infty_c\left(N\backslash G\right),\ \lambda_{P,\varphi}(f) = 0$.

$$\Rightarrow L^1_{cusp}\left(\Gamma\backslash G\right) = \bigcap_{\varphi \in C^\infty_c(N\backslash G)} \operatorname{Ker} \lambda_{P,\varphi}$$. Il reste à m.q. que $\lambda_{P,\varphi}$

est une forme linéaire c^0. $D = \operatorname{Supp}(\varphi) \subset N\backslash G$ compact.

$\Rightarrow$ l'image inverse du support dans $G = N.D$ et comme

$N\cap\Gamma\backslash N$ compact, on peut l'écrire $\Gamma_N . E$. Alors :

$$|\lambda_{P,\varphi}(f)| \leq \int_E |f(x)||\varphi(x)|\, dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_E |f(x)|\, dx.$$

$\exists U_1 \ldots U_n$ voisins compact t.q $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$
et $G \to \Gamma\backslash G$ homéo sur leur image.
et $\int_E |f(x)|\,dx \leq m \int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|\,dx$.

$$|\lambda_{P,\varphi}(f)| \leq m \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \qquad \square$$

<u>Lemme G</u> : $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G, \sigma, \chi) \subset \mathcal{A}^\infty(G/\Gamma) \otimes V$

<u>Preuve</u>: Par H-C, on sait qu'il existe $\alpha \in C_c^\infty(G)$ $f = \alpha * f$
Pour $g \in \mathfrak{g}$, $f(g;x) = (\alpha * f)(g;x) = (\rho(g)\alpha * f)(x) = \int \rho(g)\alpha(y) f(y^{-1}x)$
c, r t.q $|f(x)| \leq \|x\|^r$.
$|f(g;x)| \leq c\|x\|^r \int_G |\rho(g)\alpha(y)|\,\|y^{-1}\|^r\,dy. = c(g)\,\|x\|^r$.

<u>Lemme H</u>: Si $\varphi \in \mathcal{A}(G/\Gamma)$, $f \in {}^\circ\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma)$, $\int_{A_G\backslash G} |\varphi(x) f(x)|\,dx < +\infty$
<u>Preuve</u>: $G = \mathcal{S}\,\Xi\,\Gamma$
m.q $\int_{\mathcal{S}} |\varphi(x\xi) f(x\xi)|\,dx < +\infty \quad \forall \xi \in \Xi$.

Par le lemme A, $\varphi \in \mathcal{A}(G/\Gamma, \lambda_1)$ et $f \in {}^\circ\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma, \lambda_0)$
Par le lemme E, $f \in \mathcal{A}(G/\Gamma, \lambda)$ $\forall \lambda$. et aussi φf, $\forall \lambda$.
En particulier dans $\mathcal{A}(G/\Gamma, 0)$ i.e $\varphi(x\xi) f(x\xi)$ bornée
+ $\mathrm{vol}(G/A_\Gamma) < +\infty$. $\square$.

<u>Cor</u>: ${}^\circ\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma) \subset L^2_{cusp}(G/\Gamma)$ et tte f de ${}^\circ\mathcal{A}^\infty(G/\Gamma)$ bornée.
et ${}^\circ\mathcal{A}(G/\Gamma, \sigma, \chi) \subset L^2_{cusp}(G/\Gamma) \otimes V$.

<u>Th</u>: $\dim {}^\circ\mathcal{A}(G/\Gamma, \sigma, \chi) < +\infty$.
<u>Preuve</u>: Lemme de Godement. m.q $\subset$ fermé.
$\varphi_n \in \mathcal{H}$ $\varphi_n \to \varphi$ ds $L^2(G/\Gamma) \otimes V$ $\Rightarrow \varphi \in {}^\circ L^2(G/\Gamma, \sigma)$
si $\varphi_n \xrightarrow{L^2} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{L^1} \varphi$ et $\varphi_n \to \varphi$ $\bar{c}$ distrib. $\bar{c}$ $\underline{d}$ c° sur les distrib $z\varphi_n \to z\varphi$ $z \in \mathcal{Z}$ et $z\varphi = \varphi\chi(z)$. $\varphi \in L^2_{cusp}(G/\Gamma, \sigma, \chi)$
$\bar{c}$ $\varphi = \alpha * \varphi$ $\alpha \in C_c^\infty(G)$, $\varphi \in \mathcal{A}_{cusp}(G/\Gamma, \sigma, \chi)$ par Lemme F.

Formes automorphes (3^e Suite)

Preuve du théorème d'Harish-Chandra

Par réc sur $\mathrm{rang}_{\mathbb{Q}} G$.

$\mathrm{rang}_{\mathbb{Q}} G = 0$. alors les formes automorphes st cuspidales ok.

. $\mathrm{rang}_{\mathbb{Q}} G > 0$. P $\mathbb{Q}$-parabolig. $P = MAN$

$f \in \mathcal{A}(G_\Gamma, \sigma, \chi)$, $\pi_P(f)$ f° sur $M_1 = MA$ $\pi_P(f)(m) = d(m) f_P(m)$

$d(m) = |\det_{\mathfrak{n}}(\mathrm{Ad}(m))^{\frac{1}{2}}|$

Proposition (H.C) a) $\exists\ \theta : \mathcal{Z} \to k[\mathfrak{h}]^W$ qui est un isomorphisme

b) soit $\mu : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}_1$ $(\mathcal{Z}_1 = Z(\mathcal{U}(\mathfrak{m}_1)))$ donné par a)

alors $\pi_P(zf) = \mu(z)\pi_P(f)$.

Soit $\mathcal{U} = \mathrm{Ker}\,\chi$. $\mathcal{U}_1 := \mu(\mathcal{U})$. $\mathcal{U}_1$ de codim finie dans $\mathfrak{z}_1$.

Soit $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{z}_1/\mathcal{U}_1$

Soit $\zeta_1 \dots \zeta_r \in \mathfrak{z}_1$ tels qu'ils forment une base de $\mathfrak{h}_1$.

$\zeta_1^* \dots \zeta_r^*$ base duale.

Pour $\varphi \in \mathcal{A}(G_\Gamma, \sigma, \chi)$, $\varphi_f := \sum_{1 \le i \le r} \zeta_i \pi_P f \otimes \zeta_i^*$

$\varphi_f : M_1 \to V \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_1^* := V_1$. Si $u \in \mathcal{U}$ $\mu(u)\pi_P f = \pi_P(uf) = 0$

$\Rightarrow u_1 \pi_P f = 0$.

On déf $\chi_1 : \mathfrak{z}_1 \to V_1$ par :

$(v \otimes \zeta^*)\chi_1(\eta) = v \otimes \zeta^* \eta$

Comme $\sum \zeta\, \zeta_i \pi_P f \otimes \zeta_i^* = \sum (\zeta_i \pi_P f \otimes \zeta_i^* \zeta)$, on obtient

$$\boxed{\forall \zeta \in \mathcal{Z}_1,\ \zeta \varphi_f = \varphi_f \chi_1(\zeta)}$$

En part, $H\varphi_f = \varphi_f \chi_1(H)$ $H \in \mathfrak{a}$

d'où $\varphi_f(ma) = e^{\chi_1(\log a)}$ $m \in M, a \in A$.

Enfin $\varphi_f = 0 \iff \pi_P f = 0$.

$\varphi_f = \varphi_{f|M}$ $\chi_M = \chi_{1|M}$ $\in \mathcal{A}(G_\Gamma, \sigma, \chi) \subset \mathcal{A}^\infty(G_\Gamma) \otimes V$

$\varphi_f \in \mathcal{A}\left(\Gamma_{P_n}^{\Gamma}, \sigma_n \otimes 1, \chi_n\right)$.

et Im $(f \longmapsto \varphi_f)$ de D.F par HR.

d'où $\dim \left(\mathcal{A}/\mathcal{A}_P\right) < +\infty$ Soient $P_1 \dots P_r$ représentants de Γ paraboliq/$\mathbb{Q}$ max

$\Rightarrow \dim \mathcal{A}/\cap \mathcal{A}_{P_i} \leq \sum_{i=1}^{r} \dim \left(\mathcal{A}/\mathcal{A}_{P_i}\right) < +\infty$

et $\cap \mathcal{A}_{P_i} = {}^{0}\mathcal{A}$ au cas cuspidal. $\square$

III Formes automorphes sur corps de nbres.

F corps de nbre.

Déf: $f : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est lisse :

et si $f : G(\mathbb{A}_f) \times G(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x, y) \longmapsto f(x,y)$

si à y fixé $x \mapsto f(x,y)$ lisse.

et à x fixé, $f(y,x)$ loc^t cste.

Déf: $\mathcal{A}(G, \omega)$ espace des f^o automorphes.

$\phi : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ lisse à croissance modérée t.q.

(i) $\phi(zg) = \omega(z)\phi(g)$ $\quad \omega : Z(\mathbb{Q})\backslash Z(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ unitaire.

(ii) ϕ $\mathcal{Z}$ finie $\quad (\mathcal{Z} = Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)))$

(iii) ϕ K-finie pour $K = K_\infty$ (K_∞ compact max

(v) ϕ est K_f inv p^r $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$. $\quad K_f$ compact ouvert)

Approxima$^{\circ}$ forte

S / $v_\infty \in S$, fini. $\quad G(\mathbb{Q}_S) = \prod_{v \in S} G(\mathbb{Q}_v)$

Si $G'(\mathbb{Q}_S)$ noncompact p^r chaque quotient simple de G

Alors $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{Q}_S)K^S$ fini

K^S compact ouvert de $\mathbb{A}^S = \{t \in \mathbb{A} \mid t_v = 0, v \in S\}$

classes

Si $S = \{v_\infty\}$

$$G(\mathbb{A}) = \bigsqcup_{i=1}^{r} G(\mathbb{Q}) \cdot x^i \cdot G(\mathbb{R}) K^S$$

si $\Gamma_S^i = G(\mathbb{R}) \cap \left(G(\mathbb{Q}) \cdot x^i K^S (x^i)^{-1} \right)$ arithm

et $L^2\left(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_0 \right) = \hat{\bigoplus_{i=1}} L^2 \left(\Gamma^i \backslash G(\mathbb{R}) \right)$

<u>Déf</u>: une représenta° autom π est un ss-quotient de la rep ct de $G(\mathbb{A})$.