Cassels Fröhlich
Algebraic Number theory

Gross - Hopkins
Equivariant vector bundles on the L-T
moduli spaces

Groupes p-divisibles sur un anneau local et modules formels

- A anneau de valuation discrète complet
- π uniformisante
- $k = A/\pi A$, $K = \mathrm{Frac}(A)$
- R une A-algèbre commutative

<u>Définition</u>: Un A-module formel F de dimension n sur R est :

$X = (X_1, \dots, X_n)$
$Y = (Y_1, \dots, Y_n)$
$F = (F_1, \dots, F_n)$

- la donnée d'une loi de groupe formelle $F(X,Y) \in R[[X,Y]]$

$F(X,0) = F(0,X) = X$, $F(X, F(Y,Z)) = F(F(X,Y),Z)$, $F(X,Y) = F(Y,X)$

$\exists !\, G(X) \in R[[X]] \,/\, F(X, G(X)) = 0$.

- la donnée d'un morphisme d'anneau $\theta : A \to \mathrm{End}_R(F)$ /

$\theta(a)(X) \equiv aX \quad (X^2) \quad \forall a \in A$

Ici $\mathrm{End}_R(F) = \{ f = (f_1, \dots, f_n),\ f_i \in X_i R[[X]] \,/\, F(f(X), f(Y)) = f(F(X,Y)) \}$

On note $F(X,Y) = X +_F Y$
$\theta(a)(X) = a_F(X)$

F ~~loi de groupe~~ A-module formelle de dimension n
F' " n'

<u>Définition</u>: Un homomorphisme de A-modules sur R de F dans F' est la donnée de n' séries en n variables $X' = f(X)$ /

$f(F(X,Y)) = F'(f(X), f(Y))$, / $f(a_F(X)) = a_{F'}(f(X))$

i.e. $f(X +_F Y) = f(X) +_{F'} f(Y)$

$\mathrm{Hom}_R(F, F')$ est un A-module (multiplication des lois de F')

<u>Changement de base</u> : $\alpha : R \to S$ morphisme de A-algèbres
F un A-module formel sur R
Alors $\alpha F := \{\alpha F(X,Y), \alpha a_F(X)\}$ est un A-module formel sur S
$= F \otimes_R S$

Exemple : groupe additif $G_a(X,Y) = X+Y$
$a_{G_a}(X) = aX$

groupe multiplicatif $F(X,Y) = X+Y+XY = (1+X)(1+Y)-1$
$a_F(X) = (1+X)^a - 1$

Lien avec les groupes p-divisibles.

R anneau local complet noethérien, $\mathrm{char}\, k = p$.
G schéma en groupe fini et plat sur R.
On a une suite exacte $0 \to G^0 \to G \to G^{et} \to 0$
G^0 connexe, G^{et} étale.

Thm : Il y a une équivalence de catégorie entre les groupes p-divisibles connexes sur R et les groupes formels sur R tels que la multiplication par p soit une isogénie.

(Tate, p-divisible groups).

$\Rightarrow$ étude des groupes formels.

Différentielles

F A-module formel sur R.

Def : Une différentielle sur F est une série $w(X) = f(X)\,dX = \sum f_i(X)\,dX_i$ /

$$\begin{cases} w(F(X,Y)) = w(X) + w(Y) \\ w(a_F(X)) = a\,w(X) \end{cases}$$

$w(F)$ = ensemble des différentielles

Théorème : $w(F)$ est un R-module libre de rang n, avec une base $w_i(X)$ /

$w_i(X) \equiv dX_i \quad (X^2)$

Toute différentielle sur F est fermée.

Preuve $(B_{ij}(Y)) = \left(\frac{\partial}{\partial X_j} F_i(0,Y)\right) \equiv I \quad (Y)$

inverse $(A_{ij}(Y))$.

$w_i(X) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(X)\,dX_j$

$f : F \to F'$ morphisme de A-modules formels sur R   En dimension 1 $f^* : w_{F'} \to f'(0)\,w_F$.

$f^* : w(F') \to w(F)$

$\sum g_i(X')\,dX_i' \mapsto \sum g_i(f(X))\,df_i(X)$

Dual de $w(F)$: $Lie(F)$: $D(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(X) \frac{\partial}{\partial X_i}$

$Lie(F)$ R-module libre de rang n.

Accouplement $\langle\ ,\ \rangle : w(F) \times Lie(F) \to R$

$\left(\sum g_i\,dX_i,\ \sum h_i \frac{\partial}{\partial X_i}\right) \mapsto \sum g_i(0)\,h_i(0)$

$f : F \to F'$
$f_* : \mathrm{Li}(F) \to \mathrm{Li}(F')$

$$(f^*\omega', D)_F = (\omega', f_* D)_{F'}$$

<u>Logarithme</u>

$\mathrm{Hom}(F, G_a)$?

$f : F \to G_a$
$$\omega = f^*(dX) = df(X) = \sum \frac{df}{dX_i} dX_i \quad \in \omega(F)$$

$d : \mathrm{Hom}(F, G_a) \to \omega(F)$ (morphisme de R-modules).

Prop : 1) Si R est une A-algèbre plate, alors $\mathrm{End}(G_a) \simeq R$ ($\alpha \in R \mapsto f(X) = \alpha X$) et d est une injection.
2) Si R est une K-algèbre, alors d est un isomorphisme ($\mathrm{Hom}(F, G_a) \simeq R^n$).

Preuve : 1) $f(X) \in \mathrm{End}(G_a)$, $f(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k$
$f(\pi X) = \pi f(X) \Rightarrow a_k \pi^k = \pi a_k$ dans R
$\Rightarrow a_k = 0 \ \forall k \geq 2$ (R plate)
$\Rightarrow f(X) = a_1 X$.

. $d(f) = 0 \Rightarrow f(X) \equiv o(X^2)$.
$f(\pi_F(X)) = \pi f(X) \Rightarrow f(X) = a_k X^k + \ldots$ ($k \geq 2$)
$a_k \pi^k = \pi a_k \Rightarrow a_k = 0 \Rightarrow f = 0$.

2) Si char $K = 0 \to$ différentielles sont exactes
char $K = p$
$F = G_a^n$ + construction explicite.

Application : F A-module formel de dimension 1 sur R. Si R est plat sur A, $R \hookrightarrow R \otimes K$ et $f : F \xrightarrow{\sim} G_a$ unique isomorphisme avec $df = \omega$ (ω base $\omega(F)$).
au-dessus de $R \otimes K$

f logarithme $e = f^{-1}$ exponentielle.

$$X +_F Y = e(f(X) + f(Y))$$
$$a_F(X) = e(a\, f(X))$$

<u>Hauteur.</u>

R est un corps. $\pi \neq 0$ dans $R \Rightarrow$ déjà vu. Ok.
F module formel de dim 1 $\quad (F \simeq G_a)$.

$\pi = 0$ dans R $\quad$ (R est de k par exemple).

<u>Lemme</u> : Soit $\pi_F \neq 0$ dans $\mathrm{End}(F)$ alors $\exists m \geq 1$ /
$$\pi_F(X) = f(X^{q^m}), \quad f'(0) \neq 0$$

Preuve $g = \pi_F(X)$, ω une base de $\omega(F)$.
$$g^* \omega = \pi \omega = 0.$$
Or $g^* \omega = \omega(g(X))\, g'(X) \Rightarrow g'(X) = 0$
$\Rightarrow g(X) = f_1(X^p)$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\pi_F"] \arrow[dr, "X^p"'] & & F \\ & F^p \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

Si $f_1'(0) = 0 \Rightarrow f_1(X) = f_2(X^p)$

$g(X) = f(X^{p^h})$, $h \geq 1$, $f'(0) \neq 0$.

$q = p^f$. On veut $f \mid h$

ζ racine $q-1$ i $\in A$.

$\zeta_F \circ g = g \circ \zeta_F$

$\Rightarrow \zeta = \zeta^{p^h} \Rightarrow \zeta^{p^h - 1} = 1 \Rightarrow q-1 \mid p^h - 1$

$\Leftrightarrow f \mid h$ car p est d'ordre f dans $(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^*$

On dit que F a hauteur m sur R.

R anneau local complet noethérien d'idéal maximal m contenant π, alors F a hauteur m et la réduction de F mod R/P a hauteur m.

$\overbrace{= F \otimes R/P}$

Prop : R local A-algèbre, F A-module formel de dimension 1, et de hauteur m sur R.
G A-module formel de dimension 1 sur R.

$\mathrm{Hom}_R(F, G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{R/P}(F, G)$.

Preuve $f : F \to G$ $\quad f \equiv 0 \ (p^k)$. On veut $f \equiv 0 \ (p^{k+1})$.

$[\pi_G] \circ f = f \circ \pi_F$

On $\pi_G(X) = \pi X + \dots \Rightarrow \pi_G \circ f \equiv 0 \ (p^{k+1})$

Mais $f \circ \pi_F = f(\alpha X^{q^m} + \dots) \ (p^{k+1})$ avec $\alpha \notin P$

$\Rightarrow f(X) \equiv 0 \ (p^{k+1})$.

Cor : R A-algèbre locale, F a hauteur $m \Rightarrow \mathrm{Hom}(F, G_a) = 0$

Preuve $\mathrm{Hom}_{R/P}(F, G_a) = 0$ car un tel f vérifierait

$$f \circ \pi_F(x) = \pi f(x) = 0$$
$$\text{et } \pi_F(x) = u x^{q^n} + \_ \qquad \Rightarrow f(x) = 0.$$

Extensions et Cohomologie symétrique.

$\mathcal{C}$ A-algèbre, F, F' A-modules formels de dimension n, n'.

1 cochaîne sur F : $f(X) = (f_1(X), \ldots, f_{n'}(X))$. n' éléments à n variables. Dans terme constant.
A-module.

Cobord $\delta f = \begin{cases} \Delta f(X,Y) = f(X) +_{F'} f(Y) -_{F'} f(X +_F Y) \\ \delta_a f(X) = a_{F'} f(X) -_{F'} f(a_F(X)). \quad a \in A. \end{cases}$

$$H^1(F, F') = \mathrm{Hom}(F, F').$$

2-cochaîne : $\{\Delta(X,Y), \delta_a(X), a \in A\}$.

$\{\Delta, \delta_a\}$ est un 2-cocycle symétrique.

- $\Delta(X,Y) = \Delta(Y,X)$
- $\Delta(Y,Z) +_{F'} \Delta(X, Y +_F Z) = \Delta(X +_F Y, Z) +_{F'} \Delta(X,Y)$.
- $\delta_a(X) +_{F'} \delta_a(Y) +_{F'} \Delta(a_F X, a_F Y) = a_{F'} \Delta(X,Y) +_{F'} \delta_a(X+Y)$
- $\delta_a(X) +_{F'} \delta_b(X) +_{F'} \Delta(a_F X, b_F X) = \delta_{a+b}(X)$
- $a_{F'} \delta_b(X) +_{F'} \delta_a(b_F X) = \delta_{ab}(X)$.

Contient les cobords.
$H^2(F, F') = $ 2-cochaînes symétriques / 1-cobords.

Extensions

Une extension de F par F' est un module formel E avec $\alpha : F' \to E$, $\beta : E \to F$ /
$0 \to F' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} F \to 0$ exacte.

E, E' équivalentes si $\exists\, i ;\ E \to E'$ /

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "i"] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] & E' \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Commute.

$\mathrm{Ext}(F,F')$: les classes d'équivalence d'extensions de F par F'.

Proposition $\{\Delta, \delta_a\}$ 2-cocycle symétrique de F dans F'.
Soit E le A-module formel à entrées variables.

$$E((X',X),(Y',Y)) = (F'(X',Y') +_{F'} \Delta(X,Y),\ F(X,Y))$$
$$a_E(X',X) = (a_{F'}X' + \delta_a(X),\ a_F X)$$

E est une extension de F par F'. $\alpha(X') = (X',0)$, $\beta(X',X) = X$.
$E \in \mathrm{Ext}(F,F')$ ne dépend que de $\{\Delta,\delta_a\} \in H^2(F,F')$.

Réciproquement, toute extension est de cette forme.
$0 \to F' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} F \to 0$ $\quad \exists\, s : F \to E$ section de β.
Coordonnées (X',X) / $\quad s(X) = (0,X) \quad \alpha(X') = (X',0) \quad \beta(X',X) = X$

Alors $s(X) + s(Y) - s(X+Y) = (\Delta(X,Y), 0)$
$a_E s(X) - s(a_F(X)) = (\delta_a(X), 0)$

$$\overset{E}{\{\Delta,\delta_a\}} \xrightarrow{t} \overset{E'}{\{\Delta,\delta_a\} + \delta f}$$

alors $f : E \to E'$ $\qquad E \sim E'$
$(X',X) \mapsto (X' - f(X), X)$

Déformations du 1^er ordre

F A-module formel de dimension 1, $F' = G_a$.
$\mathrm{Ext}(F, G_a) = H^2(F, G_a)_S$
$R \subset \mathrm{End}(G_a)$.

Un A-module formel G sur $R[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ est une déformation de F
si $G \equiv F\ (\varepsilon)$, $a_G \equiv a_F\ (\varepsilon)$

G, G' sont $*$-isomorphes s'il existe $\varphi : G \to G'$ / $\varphi \equiv x\ (\varepsilon)$.

Prop : L'ensemble des classes d'équivalence de déformations G de F est isomorphe à $\mathrm{Ext}(F, G_a) \otimes_R \mathrm{Lie}(F)$

$\{\Delta, \delta_a\}$ $D = h(x) \dfrac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{cases} G(x,y) = F(x,y) + \varepsilon \Delta(x,y) h(F(x,y)) \\ a_G(x) = a_F(x) + \varepsilon \delta_a(x) h(x) \end{cases}$$

$$G(X,Y) = F(X,Y) + \varepsilon A(X,Y) \qquad A(X,Y) = A(Y,X)$$

$$G(G(X,Y),Z) = G[F(X,Y) + \varepsilon A(X,Y), Z)$$
$$= F[F(X,Y) + \varepsilon A(X,Y), Z] + \varepsilon A(F(X,Y),Z)$$

$$= F(F(X,Y),Z) + \varepsilon A(X,Y)\underbrace{F_1(F(X,Y),Z)} + \varepsilon A(F(X,Y),Z)$$

$$= \frac{F_1(X, F(Y,Z))}{F_1(X,Y)} = \cancel{\frac{h(X +_F Y +_F Z)\, h(X)}{h(X +_F Y)\, h(X)}}$$

$$= \frac{h(X +_F + Y +_F Z)}{h(X +_F + X)}$$

Courbe elliptique

$y^2 = x^3 + ax + b$ $\quad y = \frac{-1}{w} \quad x = \frac{z}{w} \quad z = -\frac{x}{y} \quad w = -\frac{1}{y}$

$$w = z^3 + azw^2 + bw^3 = z^3 + az(z^3 + azw^2 + bw^3)^2 + b(z^3 + azw^2 + bw^3)^3$$
$$= z^3(1 + A_1 z + \dots) = w(z)$$

loi de groupe formelle $(z_1, w(z_1)) + (z_2, w(z_2)) = (z_3, w(z_3))$
$z_3 = F(z_1, z_2)$.

Différentielle invariante dimen 1.

$\omega \overset{(\alpha)}{=} f(X)\,dX$

$$\omega(X +_F T) = f(F(X,T))\,dF(X,T) = f(F(X,T))\frac{\partial F(X,T)}{\partial X}\,dX$$

$$f(X) = f(F(X,T))\,F_1(X,T) \qquad F_X(X) = F_1(0,X)$$
$$f(0) = f(T)\,F_X(T)$$
$$f(T) = \frac{f(0)}{F_X(T)}.$$

base $\omega = \frac{1}{F_X(X)}\,dX$.