

Th Soit $b \in GL(V)$ et $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{D}, G)$ l'homomorphisme. Alors λ est l'image (1)
 d'un élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{D}, G)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $c \in GL(L)$ vérifiant
 1) $n\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_m, G)$
 2) $c(n\lambda)c^{-1}$ est défini sur $\bar{F}_n$
 3) $c(b\sigma)^n c^{-1} = c(n\lambda)(\pi)c^{-1}\sigma^{-n}$ dans $GL(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$

Preuve

On fixe $\rho: G \rightarrow GL(V)$ représentatif pour l'anneau $\rho: GL(L) \rtimes \langle \sigma \rangle \rightarrow GL(V)$

Unitarité Pour $g \in GL(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$ on identifie g et $\rho(g)$.

Unitarité $\bar{\Phi} = b\sigma$ On a donc $\bar{F}_n$ une décomposition en poids pour σ^{-1}

$$V_{\bar{F}_n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} V_{\bar{F}_n, \lambda}$$

Alors $V_L = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} V_{L, \lambda}$ et d'après 3), le $\bar{F}_n$ -isocristal

$$(V_{L, \lambda}, c\bar{\Phi}^n c^{-1})$$

est isomorphe de poids λ , $c(n\lambda)c^{-1}$ est donc

~~Défini le $\bar{F}$ -isocristal~~

l'homomorphisme des poids associé à ce $\bar{F}_n$ -isocristal et $(n\lambda)$ est l'homomorphisme des poids associé à $\bar{\Phi}^n$. Donc λ est bien l'homomorphisme des poids associé à $\bar{\Phi}$.

Existence: Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour image $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_m, G)$ on a alors

$$V_{\bar{F}_m} \otimes L \xrightarrow{\sim} V_L \xrightarrow{\sim} V_L^{(m\lambda)(\pi)^{-1} \bar{\Phi}^m} \otimes L$$

En choisissant un isomorphisme $\bar{F}_m$ -linéaire $V_{\bar{F}_m} \xrightarrow{\sim} V_L^{(m\lambda)(\pi)^{-1} \bar{\Phi}^m}$

on obtient $c' \in GL(V_L)$ tel que

$$c'(m\lambda)(\pi)^{-1} \bar{\Phi}^m c'^{-1} = \sigma^{-m}$$

Alors $c' \sigma^{-m} c' \in GL(L)$ donc c' définit un élément de $(GL(V)_0 / G)(\bar{F}_m)$

On a la suite exacte

$$1 \rightarrow G(\bar{F}^{(m)}) \rightarrow GL(V_{\bar{F}_m}) \rightarrow (GL(V)_0 / G)(\bar{F}^{(m)}) \rightarrow H(\bar{F}_{\bar{F}_m}, G)$$

donc c' provient d'un élément de $GL(V_{\bar{F}_m})$ pour un certain n

$$\text{un tel type de } m \text{ car } c' = \prod_n c \in GL(V_{\bar{F}_n})$$

②

d'ici $C(n+1)(n+1)^n 2^{n+1} C^{n+1} = C^{n+1}$ ce qui donne 3)

α dans $\mathcal{C}$, la décomposition de α en $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ est définie sur $\mathcal{F}_n$ (21)

Enfin, les conséquences suivantes :

a) $\alpha: b \mapsto \alpha(b)$ et $g(b)g^{-1} \mapsto g\alpha(b)g^{-1}$

Donc la classe de conjugaison définissant F est indépendante de la σ -classe de conjugaison de b

$$B(G) \longrightarrow (H_{\text{an}}(D, G)/\langle \text{conj} \rangle)(F)$$

c) Au paragraphe précédent, on a construit p
 $B(T) \rightarrow X_*(T)^p \otimes \mathbb{Q} = \text{Ker}(\text{ID}, \otimes T)$
 avec quatre deux morphismes, coïncident
 avec les deux morphismes précédents.

$b \in B(T)$, on a val $(\lambda(b)) =$
(d'après 3))

Def

$$B(G)_b = \{x \in B(G) \mid x \text{ est bannable}\}$$

$B(G)_b = \{x \in B(G) \mid \text{Im}(B(\Gamma) \rightarrow B(G)) = B(G)_b\}$
 Si Γ est maximal elliptique de G alors $B(\Gamma) \text{Im}(B(\Gamma) \rightarrow B(G)) = B(G)_b$
 donc $\text{Im}(B(\Gamma) \rightarrow B(G)) \in B(G)_b$ donc $\text{Im}(B(\Gamma) \rightarrow B(G)) \in B(G)_b$

Set T in the maximal elliptique
 $B(T) \rightarrow X(T)^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} X_*(Z) \otimes \mathbb{Q}$ and $\text{Im}(B(T)) \rightarrow B(T) =$
 center elliptique
 technique ops $(ba)^n = 3 \cdot a^n \cdot 3 \in 2(L)$

- $B(T) \rightarrow X(T)^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} X(T)^{\Gamma}$
car T est elliptique
- Réciproquement $b \in B(G)_b$, quelle à σ -conjugue ops $(b\sigma)^n = 3 \sigma^n 3 \in 2(L)$
- Donc b_{ad} est dans $H^1(F, G_{ad}) \subset B(G_{ad})$

(Kreier) T_{ad} est anisotrope max $\Rightarrow H^1(F, T_{ad}) \rightarrow H^1(F, G_{ad})$ surj. (3)
(cf preuve euclidienne)

Donc $\exists h \in G_{ad}(L)$ tq $h \text{ bal } \sigma(h)^{-1} \in T_{ad}(L)$

$g \in G_{ad}(\bar{L})$ au relèvement de h alors $Gal(\bar{L}/L) \ni \sigma \mapsto g \sigma(g)^{-1}$

$$H^1(L, T) = 0$$

d'où l'existence de $t \in T(\bar{L})$ tel que $t'g \in T(L)$

alors $t'g b \in (t'g)^{-1} \in T(L) \quad \square$

Prop 2: Si G_{ad} est simplement connexe (application $G \rightarrow D = G/G_{ad}$ induit une bijection $B(G)_b \xrightarrow{\sim} B(D)$)

En particulier, G semi-simple simplement connexe $\Rightarrow B(G)_b = 0$

Théorème: Si G semi-simple simplement connexe. Soit $T \subset G$ max anisotrope. (Kreier)

$$H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, G) = 0 \quad (\text{Kreier})$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$B(T) \rightarrow B(G)_b$$

$$\downarrow$$

$$H^1(T) \otimes \mathbb{Q} = 0$$

$$\Rightarrow B(G)_b = 0$$

de voir la surjectivité de $B(T) \rightarrow B(D)$ surjective: Soit $T \subset G$ max elliptique, il suffit que $T_{ad} = \text{Ker}(T \rightarrow D)$ est connexe. cela découle du fait que T est simplement connexe.

$B(G)_b \rightarrow B(D)$ injective: Soient $b, b' \in B(G)_b$ ayant même image. Puisque $G(L) \rightarrow D(L)$ quitte à σ -conj. on a $b' = xb$ $x \in G_{ad}(L)$

D'après le thm il existe $c \in G(L)$ tel que $c(b\sigma)^n c^{-1} = b\sigma^n$ $\sigma \in \Gamma(L)$

d'où un n -cycle $\in H^1(F, G_{ad})$ et une famille $\{b_i\}$ de G_{ad} tels que $u: \mathbb{Z} \rightarrow G_{ad}$ tel que $u(\sigma(g)) = b \sigma(g) b^{-1}$

en prolongeant on a $u: \mathbb{Z}(L) \times \langle \sigma \rangle \rightarrow G(L) \times \langle \sigma \rangle$

alors $y = u^{-1}(x) = u^{-1}(b' b^{-1})$

$y\sigma = u^{-1}(b'\sigma)$ b' est banale $\Rightarrow y \in \mathbb{Z}_{ad}(L)_b$

D'après le premier point $\exists d \in \mathbb{Z}_{ad}(L)$ tel que $y = d\sigma^{-1}d^{-1}$

On a alors $b^i = a(a)b \circ (a(a))^{-1}$ $\square$

On a construit pour les trois dévise fonctiels $B(\tau) \xrightarrow{\sim} x_*(\tau)_P \xrightarrow{\sim} x^*(\hat{\tau})^P$ (4)
 On veut étendre cela en un isomorphisme fonctiel (pour les hom distingués)

$$B(G)_b \xrightarrow{\sim} x^*(Z(\hat{G})^P)$$

Th2 Il existe un unique isomorphisme fonctiel

$$B(G)_b \xrightarrow{\sim} x^*(Z(\hat{G})^P)$$

qui coïncide avec celui pour les trois.

Preuve: On étend l'isomorphisme peu à peu, il faudrait ensuite vérifier qu'il est bien fonctiel

Cas où $G_{\text{ét}}$ est simplement connexe:

$$\begin{array}{ccc} B(G)_b & \xrightarrow{\sim} & B(D) \\ & \downarrow \cong & \\ x^*(Z(\hat{G})^P) & \xleftarrow{\sim} & x^*(\hat{D}^P) \end{array}$$

Cas où G est quelconque:

Lemme: Il existe une extension centrale H de G telle que C est central et $H_{\text{ét}}$ est simplement connexe.

Preuve: $T \in G$ via $\max$ $\hat{G}_{\text{ét}}$ le rev. simplement connexe de $G_{\text{ét}}$
 prendre $H = \hat{G}_{\text{ét}} \times T$ où T agit par adjonction
 alors $H \rightarrow G$ est surjectif et $C = \ker(H \rightarrow G) \cong T_{\text{ét}}$
 $(\hat{g}, 1) \mapsto \hat{g}$ central car $\hat{G}_{\text{ét}}$ simplement connexe $\square$

Soit une telle extension alors $B(H) \rightarrow B(G)$ est surjective donc $B(H)_b \rightarrow B(G)_b$ aussi (l'extension est centrale)

$$\begin{array}{ccccc} B(C) & \rightarrow & B(H)_b & \rightarrow & B(G)_b \rightarrow I \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ x^*(Z(\hat{C})^P) & \rightarrow & x^*(Z(\hat{H})^P) & \rightarrow & x^*(Z(\hat{G})^P) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B(C) & \longrightarrow & B(H)_b & \longrightarrow & B(G)_b & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow 2 & & \downarrow 2 & & \downarrow \text{dép. 1e point} & & \\
 X^*(\hat{C}^\Gamma) & \longrightarrow & X^*(Z(\hat{H})^\Gamma) & \longrightarrow & X^*(Z(\hat{G})^\Gamma) & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

Les deux suites horizontales, définissant des iso.

$$B(H)_b / B(C) \xrightarrow{\sim} B(G)_b$$

$$X^*(Z(\hat{H})^\Gamma) / X^*(\hat{C}^\Gamma) \xrightarrow{\sim} X^*(Z(\hat{G})^\Gamma)$$

D'où l'existence d'un iso $B(G)_b \xrightarrow{\sim} X^*(Z(\hat{G})^\Gamma)$
on obtient l'unicité et la fonctionnalité par le lemme suivant

Lemme 2 Soient $\mathcal{A} \rightarrow C_1 \rightarrow H_1 \rightarrow G \rightarrow 1$ deux extensions exactes
et $\mathcal{A} \rightarrow C_2 \rightarrow H_2 \rightarrow G \rightarrow 1$ comme dans le lemme 1

Alors il en existe une troisième $\mathcal{A} \rightarrow C_3 \rightarrow H_3 \rightarrow G \rightarrow 1$
et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1 & \leftarrow & H_3 & \rightarrow & H_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & G & = & G & = & G
 \end{array}$$

Preuve Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(F, G) & \xrightarrow{\sim} & \pi_0(Z(\hat{G})^\Gamma)^\mathbb{D} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B(G)_b & \xrightarrow{\sim} & X^*(Z(\hat{G})^\Gamma)
 \end{array}$$

En effet pour (c) c'est dû au fait que l'image de $H^1(F, G)$ par l'application $B(T) \xrightarrow{\sim} X_*(T)_\mathbb{D}$ est $X_*(T)_\mathbb{D}$ car on a déjà vu que G est simple et connexe par le cas général en procédant comme dans la preuve du théorème.

ANNEXE : Un résultat de Kneser



lemme G type réductif connexe / F

T tore maximal / F réductif (modulo le centre.)

alors $H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, G)$ est surjectif

Preuve Soit $\tilde{G}$ le revêtement simplement connexe de G avec $C = Z(\tilde{G})$

$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \times C^0 \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ Not facile commutatif

$\tilde{T} \times C^0 = p^{-1}(T)$ $\tilde{T}$ est un F -tore maximal de $\tilde{G}$

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{T} \times C^0 \rightarrow T \rightarrow 1$$

On a donc le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \tilde{T} \times C^0) & \rightarrow & H^1(F, T) & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & H^2(F, N) \xrightarrow{\varphi} H^2(F, \tilde{T} \times C^0) \\ & & \downarrow & & \parallel \\ & & H^1(F, G) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, N) \end{array}$$

Puisque $\tilde{T}$ est anisotrope, par Tate-Nakayama les groupes $H^2(F, \tilde{T}) = 0$

$H^0(F, \chi^*(H))' = 0$ soit la dualité $\Rightarrow H^2(F, \tilde{T}) = 0$

Pour conclure $H^2(F, \tilde{T} \times C^0) = H^2(F, C^0)$ et $\varphi \circ \delta = 0$

Soit $\beta \in H^1(F, G)$, il existe $\alpha \in H^1(F, T)$ tel que $\delta(\alpha) = \delta(\beta)$. Quant à tout α on peut supposer $\delta(\alpha) = 0$

Mais comme $H^1(F, G) = 0$ (Kneser-Tits), $H^1(F, \tilde{T} \times C^0) \rightarrow H^1(F, G)$ est surjectif - On conclut donc le lemme. $\square$