

I sinistra

$F/\mathbb{Q}_p$ ext. finie

$$L = \widehat{F^{n^r}}$$

$$\begin{matrix} \overline{L} \\ \cup \\ \overline{F} \end{matrix}$$

$$\Gamma = \text{Gal}(\overline{F}/F) \quad (1)$$

F_n l'ext. nr de F de degré n

σ le Frobenius sur L

$x \mapsto x^{1 \# p}$ sur le corps résiduel

$$\text{On a } F = L^{\sigma=1}$$

G un p -groupe linéaire connexe / F

$$B(G) = H^1(\langle \sigma \rangle, G(L)) = G(L) / \langle \sigma \rangle$$

$$\text{Th : } L \text{ est un corps } (1) \Rightarrow \text{ } H^1(L, G) = 0$$

$$H^1(F^{n^r}, G) = 0$$

$$0 \rightarrow \text{Gal}(\overline{L}/L) \rightarrow W(\overline{L}/F) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

On a la suite exacte d'inflation-restriction

$$1 \rightarrow B(G) \rightarrow H^1(W(\overline{L}/F), G(\overline{L})) \rightarrow H^1(L, G) = 0$$

d'où une bijection

$$B(G) \xrightarrow{\sim} H^1(W(\overline{L}/F), G(\overline{L})) / (1)$$

De plus, on a une injection

$$H^1(F, G) \hookrightarrow H^1(W(\overline{L}/F), G(\overline{L}))$$

En effet, l'ext gal finie E/F , on a une suite exacte

$$1 \rightarrow W(\overline{L}/E) \rightarrow W(\overline{L}/F) \rightarrow \text{Gal}(E/F) \rightarrow 1$$

$H^1(E/F, G(E))$ et un diagramme commutatif

$$H^1(\text{Gal}(E/F), G(E)) \xrightarrow{\text{it}} H^1(W(\overline{L}/F), G(\overline{L}))$$

$$\downarrow \text{inf} \quad H^1(F, G)$$

$$\text{et } H^1(F, G) = \varinjlim_E H^1(\text{Gal}(E/F), G(E))$$

On en déduit par (1) une injection

$$H^1(F, G) \hookrightarrow B(G)$$

Prop 1:

Soit $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$ une suite exacte de p -groupe sur F avec G_1 linéaire connexe. Alors on a une suite exacte

$$1 \rightarrow G_1(F) \rightarrow G_2(F) \rightarrow G_3(F) \rightarrow B(G_1) \rightarrow B(G_2) \rightarrow B(G_3) \rightarrow 1$$

Preuve: Car $H^1(L, G_1) = 0$, on a une suite exacte

$$1 \rightarrow G_1(L) \rightarrow G_2(L) \rightarrow G_3(L) \rightarrow 1$$

Cave $F = L^{\sigma=1}$, en prenant la suite exacte logie par la cohomologie par $\langle \sigma \rangle$ on obtient

$$1 \rightarrow G_1(F) \rightarrow G_2(F) \rightarrow G_3(F) \rightarrow B(G_1) \rightarrow B(G_2) \rightarrow B(G_3) \rightarrow 1$$

Prop2: soit E/F une extension finie dans $\bar{L}$ G/E un p -alg

$$RG = R_{E/F} G$$

Alors $G \hookrightarrow RGL$ est induit comme $\langle \sigma \rangle$ -module à partir de $G(L_E)$ comme $\langle \sigma_E \rangle$ -module. Un adac par Shapiro un isomorphisme

$$B(RG) \xrightarrow{\sim} B(G)$$

II - Ces destines $A/\mathbb{Z}$ l'isomorphisme $B(T) \simeq X_*(T)_\mathbb{Z}$

Lemme 1: soit $A: (F\text{-tors}) \rightarrow Ab$ un foncteur additif renfermant

a) $A(R_{E/F} G_m) \simeq \mathbb{Z}$ E/F ext gal finie

b) Suite exacte $1 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow 1$ de F -tors, la suite

$$A(T_1) \rightarrow A(T_2) \rightarrow A(T_3) \rightarrow 1 \text{ est exacte}$$

Alors A est isomorphe au foncteur $T \mapsto X_*(T)_\mathbb{Z}$ et l'hom-Canonique

$$\text{Hom}(X_*(T)_\mathbb{Z}, A) \rightarrow \text{Hom}(X_*(G_m)_\mathbb{Z}, A(G_m))$$

est un isomorphisme

Preuve: A vérifie que le foncteur $T \mapsto X_*(T)_\mathbb{Z}$ vérifie les a) et b) c'est facile

~~B Le foncteur X_* est représenté par $\varprojlim_E R_{E/F} G_m$ i.e. un isomorphisme de foncteur~~

$$X_*(T) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_E \text{Hom}(R_{E/F} G_m, T)$$

Soit $\mu \in X_*(T)$ E/F gal finie E'/E gal finie by $T_{E'}$ soit déployé

$$\text{donc } \mu \in \text{Hom}(G_m, E', T_{E'}) \text{ et a pred l'inv par la norme } \Rightarrow \mu_E \in \text{Hom}(G_m, E, T_E)$$

Preuve du lemme 1°:

On a un foncteur pleinement fidèle

(3)

$$(F\text{-}t\text{-}oes)^{op} \rightarrow F(F\text{-}t\text{-}oes, Ab)$$

(Yoneda)

$$T \longmapsto \text{Hom}(T, \cdot)$$

on identifie un tae à son image par ce foncteur

$$\text{alors } \forall F \in \mathcal{F}(F\text{-}t\text{-}oes, Ab)$$

$$F(T) = \text{Hom}(T, F)$$

$$R_{E/F} G_m \text{ représente alors le foncteur } T \longmapsto \text{Hom}(R_{E/F} G_m, T) \quad \begin{array}{c} \varphi \\ \downarrow \end{array}$$

$$\text{Pour } E \subset E' \text{ on a } N_{E'/E} : R_{E'/F} G_m \rightarrow R_{E/F} G_m$$

$$\begin{array}{ccc} R_{E'/F} G_m & \xrightarrow{N_{E'/E}} & R_{E/F} G_m \\ \text{Hom}(G_m, E', T_{E'}) & \xrightarrow{\varphi_{E'}} & \text{Hom}(G_m, E, T_E) \end{array}$$

devient alors l'application naturelle $\text{Hom}(G_m, E, T_E) \hookrightarrow \text{Hom}(G_m, E', T_{E'})$

$$\text{On a alors un isomorphisme de foncteurs } X_* \simeq \varinjlim R_{E/F} G_m$$

$$\text{D'où un isomorphisme canonique } \text{Hom}(X_*, A) \simeq \varprojlim_E A(R_{E/F} G_m)$$

Les morphismes de transitions étant les $A(N_{E'/E})$

Or, $N_{E'/E}$ est surjective de noyau un tae donc la propriété b) implique que $A(N_{E'/E})$ est surjective. D'après la propriété a) $A(R_{E/F} G_m) \simeq \mathbb{Z} \forall E$ par conséquent, les $A(N_{E'/E})$ sont des iso

$$\Rightarrow \varinjlim_E A(R_{E/F} G_m) \simeq A(G_m)$$

On a donc bien un isomorphisme $\text{Hom}(X_*, A) \xrightarrow{\sim} A(G_m)$

Le morphisme naturel de l'énoncé est la composée de cette iso et du morphisme naturel $\text{Hom}(X_*(\cdot)_F, A) \rightarrow \text{Hom}(X_*, A)$

Il suffit donc de montrer que tout morphisme entre X_* et A se factorise par $X_*(\cdot)_F$

Soit $\alpha \in \text{Hom}(X_*, A)$ T un F -tae et $\mu \in X_*(T)$ Soit E qui détermine T et $\tau \in \text{Gal}(E/F)$

Il maph $R_{E/F} G_m \rightarrow T$ qui envoie μ sur $\tau \mu$

On en déduit l'élément α $R_{E/F} G_m$ qui envoie μ et $\tau \mu$ par α sur les mêmes

On a un diagramme commutatif

4

$X_*(G_m) \rightarrow A(G_m)$
 Et puisque $N_{E/F}(\sigma_E) = N_{E/F}(\mu_E)$, ce qui donne le résultat -
 L'on can donc choisir un générateur de $A(G_m)$ et soit $\alpha: X_*(\cdot)_F \rightarrow A$ l'ham de
 fonctions correspondants. On doit montrer que α est un iso $N_{E/F} \xrightarrow{\sim} X_*(G_m)$
 Par de f, α G_m est un iso et puisque $X_*(R_{E/F} G_m)_F \xrightarrow{\sim} X_*(G_m)$
 $A(R_{E/F} G_m) \xrightarrow{\sim} A(R_{E/F} G_m)$

$\alpha_{R_{E/F}} \otimes u \text{ est un iso } \forall E$
 soit $\alpha_{R_{E/F}} \otimes u = A(t_1) \times A(t_2)$, $\alpha_{E/F}$ est un iso $\forall u \in T$
 produit de bases de la forme $R_{E/F} \otimes G_m$.
 il T une quelconque, il existe une V de la forme
 une suite exacte

On a alors le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes

le diagramme commutatif suivant doit

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & \rightarrow & U & \rightarrow & V & \rightarrow & T & \rightarrow & 1 \\
 & & & & & & & & & & \\
 X_*(U)_n & \rightarrow & X_*(V)_n & \rightarrow & X_*(T)_n & \rightarrow & 1 \\
 \downarrow \alpha_U & & \downarrow \alpha_V & & \downarrow \alpha_T & & \\
 A(U) & \rightarrow & A(V) & \rightarrow & A(T) & \rightarrow & 1
 \end{array}$$

est surjectif

$\alpha_v \text{ iso} \Rightarrow \alpha_T \text{ suj-}$
 Par le même raisonnement pour U α_U est surjectif
 Puis par diagramme chasing $\alpha_T \text{ iso}$
 $T \rightarrow B(T)$ renferme les a

Prop : ~~B vérifie les~~ $T \mapsto B(T)$ vérifie les a) et b) du lemme précédent

Preuve : b) est déjà vu
a) Par l'iso de Schapiro, on est ramené à prouver que $B(G_m) \cong \mathbb{Z}$

$$B(G_m) = L^x / \sim \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto \text{val}(x)$$

$$\text{il suffit de voir que } \mathcal{O}_L^x \xrightarrow{b} \mathcal{O}_L^x \\ b \mapsto \frac{b}{\sigma(b)} \quad (5)$$

β preserve la filtration de $\mathcal{O}_L^x$ est injectif

$$\mathcal{O}_L^{(0)} = \mathcal{O}_L^x$$

$$\mathcal{O}_L^{(i)} = 1 + \mathcal{O}_L^{\geq i} \quad i \geq 1$$

donc il suffit de vérifier par récurrence que β est injectif sur les quotients successifs i.e. qe

$$\overline{k}_F^x \rightarrow \overline{k}_F^x \\ x \mapsto x^{1-q}$$

$$\overline{k}_F \rightarrow \overline{k}_F \text{ sat injectifs} \\ x \mapsto x - x^q$$

D'après le lemme 1, le choix d'un iso $X_*(L)_F \xrightarrow{\sim} B$ revient au choix d'un générateur de $B(G_m)$. On choisit le générateur correspondant à ce uniformisateur de L .

* On peut alors donner une description plus explicite de $X_*(L)_F \xrightarrow{\sim} B$.

Soit T une E/F ext gal qui déplace T , $\mu \in X_*(T)$
 $F \subseteq E_0 \subset E$ est la sous-ext. non ramifiée max
 alors l'image de la classe de μ par le morphisme $X_*(T)_F \xrightarrow{\sim} B(T)$
 est la σ -classe de conjugaison de $Nm_{E/E_0}(\mu(\pi_E))$

$$(Nm_{E/E_0} : T(E) \rightarrow T(E_0)) \\ x \mapsto \prod_{\sigma \in \text{Gal}(E/E_0)} \sigma(x)$$

$$\text{En effet } \exists! \begin{array}{ccc} RE/F & G_m & T \\ \mu_E \mapsto & & \mu \end{array}$$

$$\text{et alors on a le diagramme commutatif}$$

$$\begin{array}{ccc} \mu_E & \xrightarrow{\quad} & \mu \\ X_*(RE/F, G_m)_F & \xrightarrow{\quad} & X_*(T)_F \end{array}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \\ \begin{array}{ccc} B(RE/F, G_m) & \xrightarrow{\quad} & B(T) \\ Nm_{E/E_0}(\mu_E(\pi_E)) & \mapsto & Nm_{E/E_0}(\mu(\pi_E)) \end{array}$$

On est donc ramené au cas $(RE/F, G_m, \mu_E)$

Mais alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mu_E & \xrightarrow{\quad} & X_*(G_m) = \mathbb{Z} \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\ X_*(RE/F, G_m)_F & \xrightarrow{\quad} & B(G_m) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B(RE/F, G_m) & \xrightarrow{\sim} & B(G_m) \\ Nm_{E/E_0}(\mu_E(\pi_E)) & \mapsto & [\pi_E] \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que $N_{E/F} (N_{E/E_0} [\mu_E(\pi_E)])$ est ~~une~~ uniforme de E_0 .

(Or $R_{E/F} G_m(E) = (E \otimes_F E)^*$ est muni d'une action naturelle de $\text{Gal}(E/F) \times \text{Gal}(E/F)$)

et alors $N_{E/F} \circ N_{E/E_0} = N_{E/E_0} \circ N_{E/F} = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(E/E_0)} \prod_{\tau \in \text{Gal}(E/F)} (\tau, \sigma)$

On a par conséquent $N_{E/F} (N_{E/E_0} [\mu_E(\pi_E)]) = N_{E/E_0} [N_{E/F} \circ \mu_E(\pi_E)]$
 $= N_{E/E_0} (1(\pi_E)) = N_{E/E_0} (\pi_E)$

B/ Diverses compatibilités

~~Prop 1~~ : L'iso $X_*(T)_F \xrightarrow{\sim} B(T)$ est compatible à l'iso de Shapiro

Prop 1 : Soit F'/F ext. finie $\Gamma' = \text{Gal}(\bar{F}/F')$ $T \in F'$ -tors on a diag commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_*(T)_{F'} & \xrightarrow{\sim} & B(T) \\ \downarrow \wr & \uparrow \wr & \\ X_*(RT)_F & \xrightarrow{\sim} & B(RT) \end{array}$$

à des deux flèches verticales sont les isomorphismes de Shapiro

$$X_*(T) \rightarrow X_*(T) \otimes_{Z[\Gamma']} Z[\Gamma] = X_*(RT)$$

Preuve : 2 façons de parcourir le diag $\Rightarrow$ 2 iso factoriels $X_*(T)_{F'} \xrightarrow{\sim} B(T)$
 d'après le lemme, il suffit de vérifier que ces isomorphismes coïncident pour $T = G_m$

$$\} E = E \cdot b/b_1$$

Rappels sur Tate - Nakayama Soit T un tre

On a une application bilinéaire de P -modules

$$X^*(T) \times T(\bar{F}) \rightarrow \bar{F}^*$$

qui induit par cup-produit une application bilinéaire

$$H^r(F, X^*(T)) \times H^{2-r}(F, T) \rightarrow H^2(F, \bar{F}^*) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Pour laquelle :

- 1/ Les groupes $H^0(F, X^*(T))^c$ et $H^2(F, T)$ sont en dualité
- 2/ Les groupes $H^1(F, X^*(T))$ et $H^1(F, T)$
- 3/ Les groupes $H^2(F, X^*(T))$ et $H^0(F, T)^c$

D'après l'exposé de Gabriel, on a $H^1(F, X^*(T)) = \pi_0(\hat{T}^n)$

d'où un isomorphisme

$$\frac{N_P X_*(T)}{I_P X_*(T)} = X_*(T)_{P, \text{bas}} = \pi_0(\hat{T}^n)^D \cong H^1(F, T)$$

Soit E_F une ext-gal- sur F

Prop 2: Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X_*(T)_{P, \text{bas}} & \xrightarrow{\sim} & H^1(F, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_*(T)_P & \xrightarrow{\sim} & B(T) \end{array}$$

Preuve: Soit $\mu \in X_*(T)$ Soit E_F une ext-gal- qui décompose T et $\mu \in X_*(T)$
tel que $\sum_{\tau \in \text{Gal}(E_F)} \tau \mu = 0$. On doit montrer que l'image de μ par les deux isomorph

$$X_*(T)_{P, \text{bas}} \rightarrow B(T) \quad \text{est la même}$$

$$\mu = \text{base}$$

$$T = R_{E/F} G_n / \nu(G_n) \quad \nu = \sum_{\tau \in \text{Gal}(E_F)} \tau H_E$$

$$R_{E/F} G_n \rightarrow T \rightarrow 1$$

On se ramène alors au cas universel $\mu = \text{base}$ Blo proj-can $R_{E/F} G_n \rightarrow T \rightarrow 1$
Soit c_1 l'image de μ par droite-bas et c_2 l'image de μ par bas-droite -
On veut $c_1 = c_2$ - Montrons que c_1 et c_2 sont tous deux dans $H^1(F, T) \subset B(T)$
et que leur image par $H^1(F, T) \rightarrow H^2(F, G_n) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est $[E:F]^{-1}$
d'où la suite exacte $1 \rightarrow G_n \rightarrow R_{E/F} G_n \rightarrow T \rightarrow 1$

Traitements d'obstacle c_1 : De la suite exacte on a:

(8)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}^1(E/F, X_*(T)) & \xrightarrow{\sim} & H^1(E/F, T(E)) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{H}^0(E/F, X_*(G_m)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(E/F, G_m) = \frac{1}{[E:F]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{Z}/[E:F]\mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \frac{1}{[E:F]} & & \end{array}$$

(Les flèches horizontales sont les iso de Tate-Nakayama)

Maintenant c_2 : Soit E_0 l'ext. nr max de $E = N$ l'extension nr de F_0 de degré $[E:E_0]$

Soit π_E une uniformisante de G_m tq $N_{E/N}(\pi_E) = \pi(F) \in T(N)$

Alors c_2 est la classe de $N_{E/N}(\pi_E) \in T(N)$

Soit $b = N_{E/N}(\pi_E) \in R_{E/F} G_m(N)$

Alors $N_{N/F}(b) = N_{E/F} \circ N_{E/N}(\pi_E) = N_{E/F}(\pi_E) = \nu(\pi_F)$

$= N_{E/F}(\pi_F) = \nu(\pi_F)$

Via le choix d'un générateur $\sigma_N \in \text{Gal}(N/F)$

Par conséquent $\beta(b)$ définit un 1-cocycle de $\text{Gal}(N/F)$ à valeur dans $T(N)$, c'est l'élément c_2 via l'inclusion $H^1(\text{Gal}(N/F), T(N)) \subset B(T)$

On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \beta(b) \in H^1(\text{Gal}(N/F), T(N)) & \xrightarrow{\sim} & H^0(\text{Gal}(N/F), G_m) = F^\times / N_{N/F}^\times & & \\ \downarrow \times 2 & \nwarrow \text{via le choix de } \sigma_N & \downarrow \times 2 & & \\ H^1(\text{Gal}(N/F), T(N)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(\text{Gal}(N/F), G_m) = \frac{1}{[N:F]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \end{array}$$

$C/$ d'homomorphisme $B(T) \rightarrow X_*(T)^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}$

Soit $b \in T(L)$ $\exists! v \in X_*(T)^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}$ $\forall \lambda \in X^*(T)^{\Gamma} \text{ val}(\lambda(b)) = \langle \lambda, v \rangle$

de plus $\text{val}(\lambda(b \sigma(b)^{-1})) = 0 \quad \forall \lambda \in X^*(T)^{\Gamma}$

d'où un hom $B(T) \xrightarrow{\nu} X_*(T)^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}$

Prop : Via ~~l'isomorphisme~~ l'isomorphisme $X_*(T)_{\Gamma} \xrightarrow{\sim} B(T)$, l'hom précédent

$$X_*(T)_{\Gamma} \rightarrow X_*(T)^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}$$

$$\mu \mapsto \int_{\Gamma} \bar{z} \mu \frac{dz}{z} \text{ mesure de Haar de } \Gamma \text{ val}(\Gamma) = 1$$

Preuve : Provenir de la description explicite de l'iso et de ce qe pour $\lambda \in X^*(T)^{\Gamma}$

$$\text{val}(\lambda(\sum_{\epsilon \in E_0} (\mu(\pi_{\epsilon}))) = [\epsilon : \epsilon_0] \text{val}[\lambda(\mu(\pi_{\epsilon}))] = [\epsilon : \epsilon_0] \langle \lambda, \mu \rangle \text{val}(\pi_{\epsilon}) = \langle \lambda, \mu \rangle$$

D'après la prop2, la suite $0 \rightarrow H^1(F, T) \rightarrow B(T) \rightarrow X_*(T)^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}$ est exacte.

II. Cas général

A/ Rappels sur les F -isocristaux

$$(L = \widehat{F^{nr}})$$

Def : Un F -isocristal est un ~~seu.~~ couple (V, Φ) $\bullet \quad \Phi : V \rightarrow V$ σ -linéaire bijectif $\bullet \quad \forall L$ -e. v. de dimension

La catégorie des F -isocristaux est abélienne semi-simple et ses objets simples sont en bijection avec $\mathbb{Q} \ni r \mapsto (V_r, \Phi_r)$ de sorte que $\text{End}(V_r, \Phi_r)$ soit l'algèbre adévar d'invariant $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \text{Br}(F)$

$$\text{où } r = \frac{n}{m} \quad m > 0 \quad (m, n) = 1$$

Prop : On a $V_r = L\langle \Phi \rangle / L\langle \Phi \rangle (\Phi^m - \pi_F^n)$ $L\langle \Phi \rangle$ est l'algèbre de pol en Φ l'ordre $\Phi a = \sigma(a) \Phi \quad a \in L$

Φ_r agissant par multiplication à gauche par Φ

$\bullet$ Soit $\mathbb{D}_F$ le groupe diagonalisable de groupe des caractères $\mathbb{Q}$ une structure de L -isocristal sur $V \Leftrightarrow$ un hom $\mathbb{D}_L \rightarrow \text{GL}(V)$.

Prop :

Soit V un L -isocristal et $\nu: \mathbb{D}_L \rightarrow GL(V)$ l'hom correspondant
 existe $\mathbb{Z}$ tel que $n\nu$ se factorise par $\mathbb{D} \rightarrow G_m$
 (car $\alpha \in \mathbb{Z}C(\mathbb{Q})$)

(10)

$F_n =$ l'ext n.r. de degré n de F
 Alors $\Phi \in F_n$ -e.v. $V^{\nu'(\pi)^{-1}\Phi^n}$ engendre V comme L -e.v. :

$$V^{\nu'(\pi)^{-1}\Phi^n} \otimes_{F_n} L \simeq V$$

B/ Construction de ν

On va construire une application $\nu: B(G) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes de } GL(V_L) \text{ conj} \\ \text{de morph } \mathbb{D}_L \rightarrow G_L \end{array} \right\}$

Soit $b \in G(L)$

• Construction Tannakienne :

Soit $\rho: G \rightarrow GL(V)$ une rep. de dimension finie
 alors $\Phi = \rho(b) \circ (\text{Id} \otimes \sigma)$ fait de V_L un L -isocristal

d'où un morph $\mathbb{D}_L \xrightarrow{\nu_\rho} GL(V_L)$

Pour toute L -alg R et tout $x \in \mathbb{D}(R)$ $\nu_\rho(x)$ ρ parcourant les reps de dimension finie
 fournit un $\otimes$ -morphisme universel du ~~facteur~~ $\otimes$ -facteur

$$\omega_R^G: \text{Rep}(G) \rightarrow R\text{-mod}$$

$$(\rho, V) \longmapsto V_R$$

$$\text{Aut}^{\otimes}(\omega_R^G) = G(R)$$

D'après Saareudha

Donc il existe $g \in G(R)$ tel que $\nu_\rho(x) = \rho(g) \forall \rho$
 $x \mapsto g$ défini un hom $\mathbb{D} \xrightarrow{\nu} G$
 $\forall \rho \quad \rho \circ \nu = \nu_\rho$

• Construction à la main :

Supposons $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$ représentation fidèle
 + tenseurs $(t_i)_{i \in \mathbb{I}}$ sur V tel que $G = \{g \in GL(V) \mid g.t_i = t_i \forall i\}$

$\Phi = \rho(b) \circ (\text{Id} \otimes \sigma)$ fait toujours de V_L un L -isocristal d'où un morph $\mathbb{D}_L \xrightarrow{\nu} GL(V_L)$

Montrons que ν_ρ se factorise (uniquement) par un morph $\nu: \mathbb{D}_L \rightarrow G_L$
 on a une décomposition en L -isocristaux isoclinaux $V_L = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} V_{L,i}$

il suffit de voir que pour $i \in \mathbb{I}$ $t_i \in V^{\otimes n_i} \otimes V^{\otimes m_i}$
 t_i est nul sur $V_{L,i} \otimes \dots \otimes V_{L,i}^{\otimes n_i} \otimes \dots \otimes V_{L,i}^{\otimes m_i}$
 si $r_1 + \dots + r_{n_i} = r_i + \dots + r_{m_i}$

ona $\Phi.t_i = t_i = t_i$ Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\nu: \mathbb{D}_L \rightarrow GL(V_L)$
 $n\nu \in V^{\nu'(\pi)^{-1}\Phi^n}$
 $n_j \in V_{L,j}^{\nu'(\pi)^{-1}\Phi^n}$

Alors $t_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m) = (\Phi^{\pi}) (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m)$
 $= \pi(r_1, \dots, r_n, r'_1, \dots, r'_m) \quad (11)$
 $\cdot t(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m)$

Lemme : Soit $b \in G(L)$ $\nu: \mathbb{D}_L \rightarrow G_L$ l'ham associé et la unique ham $\mathbb{D}_L \rightarrow G_L$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{Z}, c \in G(L)$ tels que

- 1) $n\nu \in \text{Ham}(G_m, G)$
- 2) $c(n\nu)c^{-1}$ est défini sur F_n
- 3) $c(b\sigma)^n c^{-1} = c(n\nu)(\pi)c^{-1} \sigma^n$ dans $G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$

Preuve : Existence : quitte à conjuguer ν (ce qui correspond à σ -conjuguer b), on peut supposer que ν est défini sur F_n pour n assez divisible

Pour n assez divisible, on a aussi $n\nu \in \text{Ham}(G_m, G)$

Soit $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ ne rep. fidèle $\overline{\Phi} = \varphi(b)\sigma$

Pour n assez divisible, on a $\bigoplus_{i=1}^n L \xrightarrow{(\nu(\pi))^{-1}\overline{\Phi}^n} \bigoplus_{i=1}^n L \xrightarrow{\sim} V_L \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n L$

Puisque ν est défini sur F_n , la décomposition par les parties est définie sur F_n

On peut donc trouver $c_1 \in GL(V_L)$ qui commute à ν et qui vérifie (pour n assez divisible) $c_1(n\nu(\pi))^{-1}\overline{\Phi}^n c_1^{-1} = \sigma^n$

Alors $c_1^{-1} \sigma^n (c_1) \in GL(V_L)$ et définit un él^t de $(GL(V_L)/GL(L))^{\sigma^n=1}$

D'après Steinberg $H^1(F^{nr}, G) = 0$ donc il existe $c \in G(L)$ de sorte que $c_1 c \in GL(V_{F^{nr}})$

Alors $c_1^{-1} \sigma^n (c_1) \in Z_{\nu}(G(L))$ et définit un él^t de $\left(\frac{Z_{\nu}(GL(V_L))}{Z_{\nu}(GL(L))} \right)^{\sigma^n=1}$

D'après Steinberg $H^1(F^{nr}, G) = 0$ donc il existe $c \in G(L)$ t^l
 $\bullet c_1 c \in GL(V_{F^{nr}})$
 $\bullet c$ commute à ν

Alors c est un multiple de n convenant.

unicité : facile