

Plan

Centre de Bernstein I

- I - Notations / Rappels sur les groupes réductifs semi-simples $\sim 15 \text{ min}$
- II - Structure de $H(G, k)$ $\sim 10 \text{ min}$
- III - Représentations supercuspidales et admissibilité $\sim 20 \text{ min}$
- IV - Décomposition de $H(G)$ $\sim 20 \text{ min}$
- V - Description de $H(G)_D$ $\sim 20 \text{ min}$

$I \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{F} = \text{camps local au arch-}$ $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ réel complexe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{F})$ loc. - profini
 $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ $\mathcal{G}^\infty(\mathcal{G})$, $\mathcal{H}(\mathcal{G}) = \text{mesures}$ à supp compact invariant par
 trans (action par un dg cover)
 $\mathcal{H}(\mathcal{G}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$ $(\psi * \psi)(g) = \int \psi(gx) \psi(x^{-1}) dx$
 $\mathcal{G} \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}$

$M(\mathcal{G})$ $\text{Irr}(\mathcal{G})$

$\mathcal{Z}$ centre, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{H}_0 \mathcal{N}_0$ parabolique minimal
 $\mathcal{A}_0 = \text{centre de l'alg}$ de $\mathcal{H}_0$ $\mathcal{Z}_0^+ = \text{Rac}(\mathcal{A}_0, \mathcal{N}_0)$
 $\mathcal{F} = \{P \mid P_0 \in P\}$ $\mathcal{F} \xrightarrow{\Delta_0} \text{Rac}(\mathcal{A}_0, \mathcal{N}_0)$ $\overline{\mathcal{A}_M}^{+r}$

$\mathcal{F} = \{P \mid P_0 \in P\}$ $\mathcal{F} \xrightarrow{\Delta_0} \text{Rac}(\mathcal{A}_0, \mathcal{N}_0)$ $\overline{\mathcal{A}_M}^{+r}$
 $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ $\mathcal{H} \mathcal{N} = \mathcal{P} \hookrightarrow \text{Rac}(\mathcal{A}_0, \mathcal{N}_0)$ $\mathcal{N} = \mathcal{H} \mathcal{N}(\mathcal{H}_0)$

$\mathcal{G}^\infty = \bigcap_{\chi \in \mathcal{X}^*(\mathcal{G})} \text{Ker } |\chi|$ $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{G}^\infty$ $\mathcal{N} = \mathcal{H} \mathcal{N}(\mathcal{H}_0)$
 $\mathcal{H}_0^+ = \{w \in \mathcal{H}_0 \mid |\alpha(w)| \leq 1 \forall \alpha \in \Delta_0\}$ $\mathcal{N}^+ = \text{Irr } \mathcal{H}_0^+$
 $\mathcal{A}_0 \twoheadrightarrow \mathcal{A}_0 / \mathcal{A}_0 \mathcal{H}_0^0$ adjectif de section qui est étalé
 $\mathcal{A}_0 \twoheadrightarrow \mathcal{A}_0 / \mathcal{A}_0 \mathcal{H}_0^0$ sy d'indice fini de $\mathcal{N}$

une section euclidienne $\mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{H}_0$
 $\mathcal{N}^+ = \mathcal{N} \cap \mathcal{H}_0^+$ $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N}^+$
 $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{N}^+ = \bigcup_{\mathcal{H}} \mathcal{H}$
 $\mathcal{G}^\infty = \{g \in \mathcal{G} \mid \text{deg } g \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^* \mid \mathcal{N}(\mathcal{G}) \approx \mathbb{Z}$
 $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{T}) \approx \mathbb{Z}^n$ $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{smallmatrix} \right) \mapsto \left(\text{val}(\lambda_1), \dots, \text{val}(\lambda_n) \right)$
 $\mathcal{H}_0^+ = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{smallmatrix} \right\} \mid |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$
 $\mathcal{N}^+ = \{(\ell_1, \dots, \ell_n) \mid \ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_n\}$
 $\mathcal{N}^+ \xrightarrow{\tau} \mathcal{T} \left(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^{\ell_1} - \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^{\ell_n} \right)$

$\exists$ un ε_0 universel-compact $K_0 < G$ $\forall$
 (universel)
 $\bullet P_0 K = G$
 $\bullet G = K_0 \wedge^+ K$ (car K_0)

$\exists$ une base de voisinages de l'identité $K \triangleleft K_0 \wedge$

$$\forall P=HNEF \quad K = (K \cap H) (K \cap H) (K \cap H) \\
 = K_0 K_H K_0$$

$$\begin{aligned}
 \forall \lambda \in V^+ \quad \lambda K_0 \lambda^{-1} &\subset K_0 \\
 \lambda^{-1} K_0 \lambda &\subset K_0 \\
 N &= \bigcup_{n \geq 0} \sigma^{-n} K_0 \sigma^n \\
 \bar{N} &= \bigcup_{n \geq 0} \sigma^n K_0 \sigma^{-n}
 \end{aligned}$$

$$\forall \alpha \in H^{++}$$

$$K_0 = GL_n(\mathcal{O}_F)$$

$$K = I_n + \mathcal{O}_F^{\times} M_n(\mathcal{O}_F) \quad i \geq 1$$

K_0 sg compact maximal hyperspecial,
bonne position par rapport à
 P_0

$G = P_0 K_0$ (Iwasawa)

$G = K_0 \Lambda^+ K_0$ (Cartan)

Il existe une base de vecteurs de
forme de $K \triangleleft K_0$ tq

$\forall P = HNEF \quad K = K_N K_H K_N$

(Iwahori) $K_H = K_N H K_N \quad K_N = K_N N K_N$

$\forall a \in A_H^{++} \quad N = \bigcup_{n \geq 0} M_n^{-n} K_N M_n^n$

$\forall M \in H^{++} \quad \bar{N} = \bigcup_{n \geq 0} M_n^n K_N M_n^{-n}$
 $\{M \in H^{++} / |M| < 1\} \quad \forall K \in K_H$

$K_0 = GL_n(O_F)$

$G = \bigsqcup_{i=-\infty}^{\infty} K_0 \begin{pmatrix} \varpi_F^i & \\ & \varpi_F^{-i} \end{pmatrix} K_0$

$K = I_n + \varpi_F^i M_n(O_F) \quad i \geq 1$

$\forall \lambda \in \Lambda^+ \quad \lambda K_N \lambda^{-1} \subset K_N$
 $\lambda^{-1} K_N \lambda \subset K_N$

II Description de $H(G, K)$

K admettant une décomposition d'Iwahori
 Δ_{K_0}

$H(G, K) = \{ s \in H(G) \text{ bi-invariant par } K \}$

$\downarrow$
 admet $\{ e_{K g K} / g \in G \}$ comme base

$G = K_0 \Lambda^+ K_0 \quad K_0 = \bigsqcup_i \alpha_i K$

$= \bigsqcup_{i,j} K \alpha_i \Lambda^+ \alpha_j K$

Donc $H(G, K)$ est engendré comme $\mathbb{C}$ -e.v. par les $e_{K \alpha_i \Lambda^+ \alpha_j K} \quad \alpha_i, \alpha_j \in \Lambda^+$

Soit $H_0 = H(K, K)$ la sous-algèbre des distributions à support dans K_0
 engendré par les $e_{K \alpha_i K} = \alpha_i$

$C =$ la sous-espace vectoriel engendré par les $e_{K \lambda K} \quad \lambda \in \Lambda^+$
 $\lambda \in \Lambda^+ \cap \Lambda_0$

$D =$ $\{ \alpha_i \}$ famille de représentants de Λ^+ / Λ_0

alors $\forall \lambda \in \Lambda^+, \forall i, j$

$e_{K \alpha_i K} * e_{K \lambda K} * e_{K \alpha_j K} = e_{K \alpha_i \alpha_j K} * \delta_{\alpha_i, \alpha_j} * e_{K \alpha_i K} * e_{K \alpha_j K}$

α_i, α_j non nul dans $K \quad = e_{K \alpha_i \alpha_j K} * \delta_{\alpha_i, \alpha_j} * e_{K \alpha_i K} * e_{K \alpha_j K}$
 $= e_{K \alpha_i \alpha_j K} * \delta_{\alpha_i, \alpha_j} * e_{K \alpha_i \alpha_j K} = e_{K \alpha_i \alpha_j K}$

$$\lambda, \lambda' \in \Lambda^+ \quad e_{k\lambda k} * e_{k\lambda' k} = e_k * \delta_\lambda * e_k * e_k * \delta_{\lambda'} * e_k \\ = e_k * \delta_\lambda * e_k * \delta_{\lambda'} * e_k = e_k * \delta_\lambda * e_{k_{N_\lambda}} * e_{k_{N_\lambda}} * e_{k_{N_{\lambda'}}} * \delta_{\lambda'} * e_k \\ \stackrel{\text{dim } 1}{=} e_k * \delta_{\lambda\lambda'} * e_k = e_{k\lambda\lambda' k}$$

Th $\mathcal{H}(G, k) = \mathcal{H}_0 \underbrace{D(\mathcal{H}_0)}_{\substack{\text{dim } 1 \\ \text{sur-alg\`ebre commutative ayant } a\text{-g\`enerateurs}}}$

Cor: $V \neq K_0$) il n'y a qu'un nombre fini de représentations compactes de G° (à isop. près) (π, V)

Preuve.

$$\mathcal{H}(G^\circ, K) \xrightarrow{\pi} \text{End}_\mathbb{C}(V^K) \quad \text{car } V^K \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{a(\lambda) / \lambda \in \Lambda^+ n G^\circ\} \subset \mathcal{H}_0$$

Comme π est compacte, $\pi(a(\lambda))$ est nilpotent $\forall \lambda \in \Lambda^+ n G^\circ$

$$\Rightarrow \pi(a(\lambda))^c = 0 \quad (*)$$

$$\pi(a(\lambda^c))$$

donc $\mathcal{H}(G^\circ, K) \xrightarrow{\pi} \text{End}_\mathbb{C}(V^K)$ se factorise par un quotient de $\mathcal{H}(G^\circ, K)$ qui est de dimension finie

$\Rightarrow$ nb fini de représentations compactes de $\mathcal{H}(G^\circ, K)$ voir (*)

$\Rightarrow$ G° compacte $\forall V^K \neq 0$

Soit $\xi^v \in (V^v)^K$ alors $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi^v \rangle \in C_c^\infty(G^\circ)$

$$\text{supp}(f) \subset K$$

III - Rep² - supercuspidales d'ordre

Def $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)$ est supercuspidale

si V est propre $r_H(\pi) = 0$

Th (Harish - chandra): (π, V) supercuspidale $\Leftrightarrow (\pi, V)$ compacte modulo le centre
 $\Leftrightarrow (\pi|_{G^0}, V)$ compacte

Preuve:

Supp (π, V) supercuspidale

Soit $K \triangleleft K_0$ admettant une décomposition d'Iwahori et $\sigma \in V$

$$G^0 \xrightarrow{\phi} V$$

$$g \mapsto \pi(e_K) \pi(g) \sigma$$

puisque $G^0 = K_0 \cdot G^0 \cap N^+ K_0$ il suffit de montrer que

$\phi|_{G^0 \cap N^+}$ est à support compact.

Soit $\lambda \in G^0 \cap N^+ \lambda \neq 1$ alors $\exists$ λ parabolique $P \in \mathcal{P}$ $\lambda \in M^{++}$

$$K = K_N \cdot K_M \cdot K_N^{++}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \pi(e_K) \pi(\lambda^n) \sigma$$

$$= \pi(e_{K_N}) \pi(e_{K_M}) \pi(\lambda^n) \pi(e_{\lambda^{-n} K_N \lambda^n}) \sigma$$

$\circ$ pour $n \gg 0$

donc $\forall \lambda \in G^0 \cap N^+ \lambda \neq 1 \quad \phi(\lambda^n) = 0$ pour $n \gg 0$

$\Rightarrow \phi|_{G^0 \cap N^+}$ à support compact.

Supp (π, V) à support compact modulo le centre

$\sigma \in V \quad K \triangleleft K_0 \quad \sigma \in V_K$

$g \mapsto \pi(e_K) \pi(g) \sigma$ a support compact dans G^0

$P = MN \in \mathcal{P}$ propre $\lambda \in N^+ \cap G^0 \cap M^{++}$

$$\text{alors } \exists n \gg 0 \text{ tq } \pi(e_K) \pi(\lambda^n) \sigma = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\pi(\lambda^n) \pi(e_{\lambda^{-n} K_N \lambda^n}) \pi(e_{K_M}) \pi(e_{\lambda^{-n} K_N \lambda^n}) \sigma = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi(e_{\lambda^{-n} K_N \lambda^n}) \sigma = 0$$

$$\Rightarrow \sigma \in V(N) \quad \square$$

Cor : (π, ν) superscridale $\Rightarrow (\pi, \nu)$ admissible
irreducible

Preuve : $(\pi|_G, \nu)$ est compacte de type fini (schon + $\{G : G^0 \neq \emptyset\} < \infty$)

donc admissible $\square$

lemme : $(\pi, \nu) \in \text{Irr}(G)$ alors $\exists \pi$ et τ rep superscridale de π $\hookrightarrow$

Preuve : π minimal $\hookrightarrow r_\pi(\pi) \neq 0$ alors $r_\pi(\pi)$ superscridale
($r_{\pi'} = r_{\pi'}^\pi \circ r_\pi$)
 $\pi' \subset \pi$

et de type fini (car π l'est)

τ quotient irreducible de $r_\pi(\pi)$

$r_\pi(\pi) \rightarrow \tau$ superscridale

Par reciprocite de Frobenius : $\pi \hookrightarrow i_\pi(\tau)$ $\square$

Cor : (π, ν) irred $\Rightarrow (\pi, \nu)$ admissible -

Preuve : τ admi $\Rightarrow i_\pi(\tau)$ admissible $\square$

Admissibilite uniforme

$\forall$ rep irred (π, ν) de G

soit K sq compact-ouvert de G $\exists c = c(G, K) \hookrightarrow$

$$\dim V^K \leq c$$

Preuve : $K \triangleleft K_0$ + decomposition d'Iwahori

$$\mathcal{H}(G, K) \xrightarrow{\pi} \text{End}_G(V^K) \text{ surjective}$$

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$$

lemme : une sous-algebre commutative de $\mathcal{H}_k(\mathbb{C})$ engendree par l elements est de $\dim \leq k^{2\frac{l}{2l-1}}$ $\square$ cf Revard

$$k^2 = (\dim V^K)^2 = \dim \text{Im}(\mathcal{H}(G, K)) \leq (\dim \mathcal{H}_0)^2 (\dim D) \underbrace{(\dim \text{Im } C)}_{\leq k^{2 - \frac{1}{2l-1}}}$$

$$\text{d'où } k \leq \dim(\mathcal{H}_0)^{2l} (\dim D)^{2l-1} \leq k^{2 - \frac{1}{2l-1}} \quad \square$$

Décomposition de la catégorie $\mathcal{M}(G)$

Soit $\text{Irr}(G)$ = classes d'iso de rep irred de G

$\text{Irr}(G)_{\text{sc}} =$ supercuspidales de G

$\mathcal{M}(G)_c$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ dont les objet sont les représentations $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)_c \Leftrightarrow$ tout les sous quotients irréductibles de π sont supercuspidaux.

$\mathcal{M}(G)_{\text{nd}} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \mathcal{M}(G)$
 $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)_{\text{nd}} \Leftrightarrow$ Aucun π n'est supercuspidal

$\Psi(G) = \text{Hom}(G/G^{\circ}, \mathbb{C}^{\times}) \cong (\mathbb{C}^{\times})^{D_G}$ les caractères non-trivialisés de G .

Prop : $(\mathcal{P}, V), (\mathcal{P}', V') \in \text{Irr}(G)$

1) $\mathcal{P}_{1G^{\circ}}$ est semi-simple de longueur finie

2) LEMME : i) $\mathcal{P}_{1G^{\circ}} \cong \mathcal{P}'_{1G^{\circ}}$

ii) $\text{JH}(\mathcal{P}_{1G^{\circ}}) \cap \text{JH}(\mathcal{P}'_{1G^{\circ}}) \neq \emptyset$

iii) $\exists \psi \in \Psi \text{ t. } \mathcal{P}' \cong \mathcal{P}\psi$

Preuve : 1) $\mathcal{P}_{1G^{\circ}} \in \mathcal{Z}$ est semi-simple de longueur finie car $[G : G^{\circ}] < \infty$

+ Schur : $\mathcal{Z}$ agit sur des scalaires

$\Rightarrow \mathcal{P}_{1G^{\circ}}$ semi-simple de longueur finie

2) i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) clair

ii) $\Rightarrow$ iii) : Soit $H = \text{Hom}_{G^{\circ}}(V, V')$ d'après ii) et 1)
 on a $H \neq 0$ et $\dim(H) < \infty$

ii) $\Rightarrow$ iii) : on a ce caractère de G sur H : $\tau(g)f = \mathcal{P}(g)f = \psi(g)f$
 avec action triviale de $G^{\circ} \Rightarrow \tau$ se factorise par $\Lambda(G)$

qui est commutatif
 soit $h \in H$ un vecteur propre commun à tous les éléments de $\Lambda(G)$

$\exists \psi : \Lambda(G) \rightarrow \mathbb{C}^{\times} \text{ t. } \forall g \in G \quad f \circ \mathcal{P}(g) = \psi(g) \mathcal{P}'(g)f$

alors f est reliée par $\rho' \psi$ car ceux-là des rep sont

$$\rho \cong \rho' \psi$$

On a ce action de $\Psi(G)$ sur $\text{Irr}(G)$

alors les stabilisateurs sont finis car si $\psi \rho \cong \rho$ $\psi|_Z = 1$

Def On appelle composante cuspidale une orbite D de $\text{Irr}(G)$, sous $\Psi(G)$

Prop : soit $\rho \in D$ un point base alors $D \cong \Psi(G) / \text{stab}(\rho)$
 donc D a une structure de variété complexe.

Prop D décompose la catégorie $\mathcal{H}(G)$ i.e. $\forall (\pi, V) \in \mathcal{H}(G)$ on a

$$V = V_D \oplus V_D^\perp$$

$$\text{avec } \mathcal{H}(V_D) \subseteq D$$

$$\mathcal{H}(V_D^\perp) \cap D = \emptyset$$

Preuve : Soit $(\pi, V) \in \mathcal{H}(G)$
 $\rho \in D$ $\pi|_G = \pi|_G$

$$\rho|_G = \underbrace{\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k}_{\text{rep. composés de } G}$$

$$\text{donc } V = V_D \oplus V_D^\perp \quad \mathcal{H}_G(V_D^\perp) \cap \{\rho_1, \dots, \rho_k\} = \emptyset$$

cette décomposition est aussi stable par G car G permute les ρ_i
 et d'après la propriété ci-dessus $\rho' \in \mathcal{H}(V_D)$ alors

$$\mathcal{H}_G(\rho'_G) \cap \mathcal{H}(\rho|_G) \neq \emptyset$$

$$\text{donc } \rho' \in D \quad \blacksquare$$

Th

$$M(G) = M(G)_c \times M(G)_i = \prod_D M(G)_D \times M(G)_i$$

c-a-d $V(\pi, V) \in M(G)$, une décomposition

$$V = \bigoplus_D V_D \oplus V, \quad \begin{array}{l} V_i \in M(G)_i \\ V_D \in M(G)_D \end{array}$$

Preuve - On pose $V_i = \bigcap_D V_D^\perp$ alors il est facile de voir que

la famille $\{V_D, D \in \text{Irr}(G)_c / \varphi(G)\} \cup \{V_i\}$

est en somme directe -

$$\text{Reste à voir que } V = \bigoplus_D V_D \oplus V_i$$

Soit $\bar{z} \in V$ et K $\mathbb{R}$ compact-ouvert $\bar{z} \in V^K$

Il n'y a qu'un nombre fini de composantes cuspidales ayant des vecteurs K -fixés : $D_1, \dots, D_{j(K)}$

$$\text{On a } V = V_{D_1} \oplus \dots \oplus V_{D_{j(K)}} \oplus V_{c,K}^\perp \Rightarrow V_{c,K}^\perp = \bigcap_{i=1}^{j(K)} V_{D_i}^\perp$$

$$\text{on a donc } \bar{z} = \bar{z}_{c,K} + \bar{z}'$$

il suffit de montrer que $\bar{z}' \in V_i$

Soit $V' = \langle \bar{z}' \rangle$, il faut voir que $\text{JH}(V') \cap \text{Irr}(G)_c = \emptyset$

Soit $p \in \text{JH}(V') \cap \text{Irr}(G)_c$ alors $\text{Hom}_G(V', p) \neq 0$ (e_{16} est cuspidale)

donc $p^K \neq 0$ i.e. $p \in D_1 \cup \dots \cup D_{j(K)}$

Or, par def de $V_{c,K}^\perp$, on a $\text{JH}(V_{c,K}^\perp) \cap (D_1 \cup \dots \cup D_{j(K)}) = \emptyset$

Def : le centre d'une catégorie est l'ensemble $\mathcal{Z}(C)$ des endomorphismes du foncteur identité de C

$$\text{ici on a } \mathcal{Z}(M(G)) \simeq \prod_D \mathcal{Z}(M(G)_D) \times \mathcal{Z}(M(G)_i)$$

ici on a $V \times e \hookrightarrow V \times \frac{1}{2} \hookrightarrow V$
c'est à donner $V \times e \hookrightarrow V$ une isomorphisme $z_x : x \rightarrow x \hookrightarrow V \times \frac{1}{2} \hookrightarrow V$
 $1 \circ z_x = z_x \circ 1$

en particulier à $z \in \mathcal{Z}(M(G)) \quad \forall (\pi, V) \quad z_V \in \mathbb{C}$
et ceci

et $\text{Hom}_{G^*}(\pi, \rho)$ admet ~~un~~ ses-général avec un vecteur

V - Description de $M(G)_D$

A) Soit D une composante cuspidale

$$D|_{G^0} = \text{id} \quad \Pi = \text{ind}_{G^0}^G \rho$$

Prop : Π est un G -module projectif de type fini de $M(G)_D$.

Preuve : $\text{Hom}_G(\Pi, \cdot) = \text{Hom}_{G^0}(\rho, \text{Res}_{G^0}^G(\cdot))$

• $\text{Hom}_{G^0}(\rho, \cdot)$ exact car $\rho(G^0)$ compact

• $\text{Res}_{G^0}^G(\cdot)$ exact

$\Rightarrow \Pi$ projectif

• $\Pi = \{ f : G \rightarrow V_\rho \mid f(g^*g) = \rho(g^*)f(g) \text{ et } \text{supp } f \text{ compact dans } \Lambda(G) \}$

ρ de t.f. engendré par $f_1, \dots, f_k$

alors Π est engendré par $\phi_1, \dots, \phi_k$

$$\phi_i(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin G^0 \\ \rho(g) f_i & \text{si } g \in G^0 \end{cases}$$

Π est de type fini

• $\forall \tau \in M(G)_D$ nul, $\text{Hom}_G(\Pi, \tau) = \text{Hom}_{G^0}(\rho, \underbrace{\text{Res}_{G^0}^G(\tau)}_{\text{image directe de } \rho}) \neq 0 \quad \square$

Soit $\Lambda(D) = \text{End}_G(\Pi)$ alors

Prop : On a une équivalence de catégories

$$M(G)_D \xrightarrow{\sim} \text{Mod-}\Lambda(D)$$

$$\tau \mapsto \text{Hom}_G(\Pi, \tau)$$

Preuve :
$$\begin{array}{ccc} \text{Mod-}\Lambda(D) & \xrightarrow{\sim} & M(G)_D \\ \tau \mapsto & & \tau \end{array}$$

$$g.(m \otimes V) = m \otimes \Pi(g)V$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod-}\Lambda(D) & \xrightarrow{\sim} & M(G)_D \\ \tau \mapsto & & \tau \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \mathcal{F}(\tau) &= \text{Hom}_G(\pi, \tau) \otimes_{\Lambda(D)} \pi \rightarrow \tau && \text{transformation naturelle} \\ f \otimes v &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

iso pour $\tau = \pi + \mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ commute avec sommes directes exactes à droite

$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{+ \mathcal{F}} & \pi + \mathcal{F} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi \text{ l.f.} & \xrightarrow{*} & \pi + \mathcal{F} \end{array}$$

$$\bigoplus_{j \in J} \pi \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \pi \rightarrow \tau \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j \in J} \mathcal{L} \mathcal{F}(\pi) & \rightarrow & \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L} \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{L} \mathcal{F}(\tau) \rightarrow 0 \\ \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} \\ \bigoplus_{j \in J} \pi & \rightarrow & \bigoplus_{i \in I} \pi \rightarrow \tau \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\mathcal{L} \mathcal{F}(M) = \text{Hom}_G \left(\pi \otimes_{\Lambda(D)} M, M \otimes_{\Lambda(D)} \pi \right) \leftarrow M$$

$$v \longmapsto m \otimes v$$

iso pour $M = \Lambda(D)$

$$\text{puis } \bigoplus_{j \in J} \Lambda(D) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \Lambda(D) \rightarrow \pi \rightarrow 0$$

B) Description de $\Lambda(D)$

On peut supposer que $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{P}) &= \text{ind}_G^G \mathcal{P} \\ &\cong \text{ind}_G^G 1 \otimes \mathcal{P} \\ &= \mathbb{C}[\Lambda] \otimes \mathcal{P} \end{aligned}$$

F est l'anneau des fonctions sur la variété alg complexe $\Psi(G)$

$$\begin{aligned} \pi(g)(f \otimes v) &= (g \cdot f) \otimes \mathcal{P}(g)v \\ &= (g \cdot f) \otimes \mathcal{P}(g)v \end{aligned}$$

Notamment $\Lambda(D)$ est un F -module.

$$G \curvearrowright \text{Hom}_G(F \otimes E, F \otimes E) = \Lambda(D)$$

$$g \cdot \varphi = (1 \otimes \rho(g)) \circ \varphi \circ (1 \otimes \rho(g^{-1})) = (g^{-1} \otimes 1) \circ \varphi \circ (g \otimes 1)$$

L'action se factorise par $G/G^0 \cong \mathbb{Z}$ d'après la décomposition

$$\Lambda(D) = \bigoplus_{X \in G/G^0 \cong \mathbb{Z}} \underbrace{\Lambda(D)(X)}_{= \{ \varphi \in \Lambda(D) \mid \varphi(f \cdot v) = \sum_{f \text{ décale de } X} \varphi(v) \}}$$

$$\Lambda(D)(X) \neq 0 \Rightarrow X \in \mathbb{Z} \Psi(G)(X) \text{ et } \rho_X \approx \rho$$

$$\forall X \in \Psi(G)(X) \text{ soit } \rho_X \in \text{Hom}_G(E, \rho_X^{-1})$$

$$\text{et } \varphi_X \in \Lambda(D) \quad c_X(f \otimes v) = \tilde{f} \otimes \rho_X(v)$$

$$\text{alors } \Lambda(D)(X) = F \varphi_X$$

$$\varphi_X \varphi_{X'} = c_{XX'} \varphi_{XX'}$$

$$c_{XX'} \in \mathbb{C}^\times$$

$$\rho_X \rho_{X'} = c_{XX'} \rho_{XX'}$$

$$\varphi_i = \text{Id}$$

$$\Lambda(D) = \bigoplus_{X \in \Psi(G)(X)} F \varphi_X$$

$$\varphi_X f = \tilde{f} \varphi_X$$

Centre de $\mathcal{H}(G)_D$:

Def: Le centre d'une catégorie abélienne est l'anneau des endomorphismes du foncteur identité.

$$\text{fx} : \mathcal{H} = \text{Mod-} A$$

$$Z(\mathcal{H}) = Z(A)$$

Ici

$$Z(\mathcal{H}(G)_D) \cong Z(\Lambda(D)) = \{ f \in F \mid f(\varphi X) = f(\varphi) \}$$

$$\forall \varphi \in \Psi(G)$$

$$\forall X \in \Psi(G)(\mathbb{Z})$$

$$= \bigoplus_{\varphi \in \Psi(G)} \varphi(G)(\mathbb{Z})$$

$$= \mathbb{C}(D)$$