Des représentations modulo p de $\mathrm{GL}(2,D)$, D algèbre à division sur un corps local

Tony Ly

Résumé

Let p be a prime number. Let F be a non Archimedean locally compact local field of residue characteristic p and D be a finite dimensional division algebra with center F. We give an irreducibility criterion for parabolically induced representations of $\mathrm{GL}(2,D)$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$ and classify (up to the supersingular ones) the irreducible smooth admissible representations of $\mathrm{GL}(2,D)$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$. This generalizes previous works of Barthel-Livné for the split $\mathrm{GL}(2,F)$.

Keywords : division algebra, mod p representations, Hecke-Iwahori algebra, parabolic induction
Mathematics Subject Classification (2010) : 22E50, 20C08

1 Introduction

L'histoire de l'étude des représentations lisses modulo p de $\mathrm{GL}(2,D)$ commence avec Barthel-Livné en 1994-95 avec le cas déployé $D = F$ (voir [BL94], [BL95]). On complète ici leur classification avec le cas non nécessairement déployé. Soient $G = \mathrm{GL}(2,D)$ et B le parabolique minimal composé des matrices triangulaires supérieures inversibles. On commence par établir le critère d'irrréductibilité suivant.

Théorème 1.1 *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations lisses irréductibles de dimensions finies de $D^\times$.*
(i) Supposons $\rho := \rho_1 = \rho_2$ de dimension 1. Alors $\mathrm{Ind}_B^G\, \rho \otimes \rho$ est admissible et est extension non scindée de deux représentations irréductibles admissibles non isomorphes.
(ii) Dans tous les autres cas de figure, $\mathrm{Ind}_B^G\, \rho_1 \otimes \rho_2$ est irréductible admissible.

Un autre travail de l'auteur sur les représentations de Steinberg généralisées établit le *(i)* dans un degré de généralité supérieur (voir chapitre 2 de [Ly13]). Cependant une preuve pédestre sera présentée ici.
Pour le *(ii)*, on présentera trois preuves distinctes. La première est notable pour sa simplicité et repose uniquement sur une étude de la restriction à B. La seconde, conditionnellement à une hypothèse sur p, s'appuie sur l'étude du module des invariants sous le pro-p-Iwahori. Quoique plus calculatoire, cette méthode a l'avantage d'exhiber des modules simples de Hecke-Iwahori. Il sera alors plus facile d'identifier des modules qu'on aura envie d'appeler supersinguliers ; l'auteur leur consacrera un travail ultérieur. Enfin, la dernière méthode présentée, plus proche des articles de Barthel-Livné (et par conséquent du travail récent de Herzig dans [Her11]) aboutit de plus au théorème de classification suivant.

Théorème 1.2 *Les représentations lisses irréductibles admissibles de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont les suivantes :*
(a) les caractères ;
(b) les représentations de Steinberg ;
(c) les induites paraboliques irréductibles ;
(d) les supercuspidales.
De plus, les supercuspidales sont exactement les supersingulières.

Tony Ly
Ecole Normale Supérieure - DMA, 75005 Paris (France)
Tel : +33 1 44 32 20 43
E-mail : tony.ly@ens.fr

On se permet deux remarques sur la manière avec laquelle on obtient cette classification :
- l'énoncé de changement de poids tel qu'on le donne ici ne met pas en jeu de calcul avec la transformée de Satake ; au contraire il met en valeur les cas pour lesquels on peut trouver un poids qui nous intéresse de manière ad hoc ;
- dans les autres cas, on se sert des énoncés d'irréductibilité précédemment prouvés (par les autres méthodes) pour obtenir des énoncés de comparaison entre quotients d'induites compactes et conclure.

Dans [Ly13] (chapitre 3), un résultat de classification similaire au théorème 1.2 est prouvé pour $\mathrm{GL}(3, D)$, ainsi que pour $\mathrm{GL}(m, D)$ ($m \geq 2$) avec des conditions sur D. La démarche empruntée ici reflète tout à fait celle qui est utilisée pour $\mathrm{GL}(m, D)$, $m > 2$, mais présente l'avantage d'éviter les difficultés combinatoires que demande le traitement de cas de rang supérieur.

On fait aussi remarquer que ce résultat ne fait que débuter l'étude des représentations lisses admissibles modulo p de G puisqu'à l'heure actuelle les représentations supersingulières ne sont connues explicitement que dans le cas $D = F = \mathbb{Q}_p$ grâce au travail de Barthel-Livné (voir [BL94], [BL95]) et de Breuil (voir [Bre03]).

2 Notations et généralités

Soient p un nombre premier et $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{F}_p$; tout corps fini de caractéristique p sera vu comme un sous-corps de $\overline{\mathbb{F}}_p$.

L'objet de cette section est de donner les notations et de présenter des faits généraux bien connus sur la théorie des représentations ou bien sur $D^\times$ ou $\mathrm{GL}(2, D)$.

2.1 Représentations et algèbres de Hecke

On pourra se reporter au paragraphe 2 de [BL94]. Dans tout ce qui suit, toute représentation considérée sera lisse (et on oubliera souvent de le mentionner), à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Soient G un groupe topologique et $H \leq G$ un sous-groupe fermé. On notera ind_H^G le foncteur d'induction compacte lisse et Ind_H^G celui d'induction lisse. L'action sur une induite se fera par translation à droite, à savoir $g.f : x \mapsto f(xg)$. On suppose H ouvert. Soit V une représentation de H. Pour tous $g \in G$ et $v \in V$, on définit $[g, v]$ comme étant la fonction de $\mathrm{ind}_H^G V$ à support dans Hg^{-1} et prenant pour valeur v en g^{-1}. En particulier, si h est un élément de H, on a $[gh, v] = [g, hv]$ et $g[1, v] = [g, v]$.
Pour toutes représentations V_1 et V_2 de H, on définit l'espace d'entrelacements

$$\mathcal{H}(G, H, V_1, V_2) := \mathrm{Hom}_G\big(\mathrm{ind}_H^G V_1, \mathrm{ind}_H^G V_2\big).$$

On se permettra aussi de noter les algèbres de Hecke

$$\mathcal{H}(G, H, V) := \mathcal{H}(G, H, V, V), \quad \mathcal{H}(G, H) := \mathcal{H}(G, H, \mathbb{1}),$$

où $\mathbb{1}$ désigne la représentation triviale de H.
Lorsque H est ouvert dans G, par réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathcal{H}(G, H, V_1, V_2) \simeq \mathrm{Hom}_H(V_1, \mathrm{ind}_H^G V_2).$$

Supposons que, pour tout $g \in G$, la double classe HgH est union finie de classes à gauche (ou à droite), et que V_1 et V_2 sont finiment engendrées en tant que H-représentations. Alors on peut (voir [HV11], section 2.2) exhiber l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_H(V_1, \mathrm{ind}_H^G V_2) & \simeq & \left\{ G \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V_1, V_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(h_2 g h_1) = h_2 f(g) h_1 \\ H\backslash \mathrm{Supp}\, f / H \text{ fini} \end{array} \right\} \\ \big(v \mapsto (g \mapsto f(g)(v))\big) & \leftarrow\!\shortmid & f \\ f & \mapsto & \big(g \mapsto (v_1 \mapsto f(v_1)(g))\big). \end{array}$$

On va souvent assimiler les opérateurs de $\mathcal{H}(G,H,V_1,V_2)$ à des fonctions sur G à travers cet isomorphisme.
Pour tous V_1,V_2,V_3 et tous $f_1 \in \mathcal{H}(G,H,V_1,V_2)$, $f_2 \in \mathcal{H}(G,H,V_2,V_3)$, on a la convolée $f_2 * f_1 \in \mathcal{H}(G,H,V_1,V_3)$ définie par

$$f_2 * f_1 : g \mapsto \sum_{x \in G/H} f_2(x) f_1(x^{-1}g). \tag{1}$$

Aussi, quand on voit les opérateurs de $\mathcal{H}(G,H,V)$ comme fonctions sur G, la structure multiplicative est donnée par la convolution, qui est bien compatible à la multiplication par composition de la première définition (voir [BL94], Proposition 5).

2.2 Des notations pour D

Soit F un corps local non archimédien localement compact à corps résiduel fini k_F de caractéristique p ; on notera $\mathcal{O}_F$ son anneau de valuation, $\mathfrak{m}_F$ son idéal maximal et $q = p^f$ le cardinal de k_F.
Soit D une algèbre à division de centre F : elle est de degré d^2 sur F pour un certain entier $d \geq 1$, et d'invariant de Brauer a_D/d avec a_D un entier de $[1, d[$ premier à d. Alors D possède un sous-corps commutatif maximal E tel que E/F est une extension non ramifiée de degré d, unique à conjugaison dans D près (voir [Ser67], Appendix) ; on note $\mathcal{O}_E$ son anneau d'entiers. On peut munir D d'une valuation discrète v_D ; on fixe une uniformisante ϖ de D (et on normalise à $v_D(\varpi) = 1$) de sorte que $\varpi_F := \varpi^d$ est une uniformisante de F. On note $\mathcal{O}_D$ l'anneau de valuation de D, $\mathfrak{m}_D = (\varpi)$ son idéal maximal et $k_D = \mathcal{O}_D/\mathfrak{m}_D$ son corps résiduel (qui est de cardinal q^d). On note $x \mapsto \overline{x}$ l'application de réduction de $\mathcal{O}_D$ à k_D. L'action de l'uniformisante sur le corps résiduel est $\varpi\overline{x}\varpi^{-1} = \overline{x}^{q^{a_D}}$ pour tout $x \in \mathcal{O}_D$. On remarque que k_D est aussi le corps résiduel de E. Ainsi, on note $[\ ]$ l'application de Teichmüller $k_D^\times \to \mathcal{O}_E^\times$, que l'on prolonge en $k_D \to \mathcal{O}_E$ en envoyant 0 sur 0.
Pour plus de précisions on pourra aller voir le chapitre 17 de [Pie82] ou le chapitre 14 de [Rei75].

Fixons un générateur μ de $k_D^\times$. Cela définit un isomorphisme $\{\ \} : k_D^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(q^d-1)\mathbb{Z}$ envoyant μ sur 1.
Pour deux entiers positifs a et b, on notera $a \wedge b$ leur plus grand commun diviseur.

2.3 Des notations pour $\mathrm{GL}(2,D)$

Le groupe $\mathrm{GL}(2,D)$ est noté G. Notons $B = \begin{pmatrix} D^\times & D \\ 0 & D^\times \end{pmatrix}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de G ; c'est un parabolique minimal de G sur F. On note U son radical unipotent et A son sous-groupe de Levi constitué des matrices diagonales.
Soit K le compact maximal $\mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_D)$ de G. Notons $K(1)$ le sous-groupe normal $1 + \varpi M_2(\mathcal{O}_D)$ de K, et $\overline{K}$ le groupe quotient $K/K(1)$, alors isomorphe au groupe fini $\mathrm{GL}(2,k_D)$. On définit $U_0 = U \cap K$. Si π désigne la projection canonique $K \twoheadrightarrow \overline{K}$, le sous-groupe d'Iwahori de K est $I = \pi^{-1}(\pi(B \cap K))$ et $I(1)$ désigne l'unique pro-p-Sylow de I, appelé pro-p-Iwahori. On remarque $I(1) = \pi^{-1}(\pi(U_0))$.

On note W_e le sous-groupe de G engendré par $\omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}$ et $s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si T désigne le tore diagonal $\begin{pmatrix} F^\times & 0 \\ 0 & F^\times \end{pmatrix}$, qui est déployé maximal, W_e est isomorphe au groupe de Weyl étendu $N_G(T)/(T \cap K)$. On note respectivement φ_1 et φ_2 les éléments particuliers $\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$ de W_e ; et ϖ désigne $\varphi_1\varphi_2$. On note A_Λ le sous-groupe de A engendré par φ_1 et φ_2 : c'est un système de représentants de $A/A \cap K$. Enfin, pour $x, y \in D^\times$, on notera $\delta_y^x := \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in A$.

Pour $x \in D$, notons $n(x)$ la matrice de U suivante : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note aussi

$$\overline{n}(x) = sn(x)s \in U^- := sUs.$$

2.4 Les « déterminants » dans $\mathrm{GL}(2, D)$

Lorsque D n'est pas commutatif (c'est-à-dire $d > 1$), il n'y a pas de déterminant canonique $\mathrm{GL}(2, D) \to D^\times$. Cependant, on va tout de même présenter un morphisme de groupes $\det_G : \mathrm{GL}(2, D) \to F^\times$ qu'on conviendra d'appeler déterminant.
Parce que E déploie D, on a le diagramme commutatif suivant (non $\mathrm{Gal}(E/F)$-équivariant) entre algèbres de matrices, qui nous permet de définir $\det_0$:

$$\begin{tikzcd} M_2(D) \otimes_F E \arrow[r, "\sim"] & M_{2d}(E) \arrow[d, "\det"] \\ M_2(D) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\det_0"] & E \end{tikzcd} .$$

On définit alors la restriction de $\det_0$ à $\mathrm{GL}(2, D)$, $\det_G : \mathrm{GL}(2, D) \to F^\times$, qui est un morphisme de groupes. Lorsque l'on fait la démarche précédente pour $\mathrm{GL}(1, D)$, $\det_G$ devient le morphisme de groupes $\mathrm{Nrm} : D^\times \to F^\times$ appelé norme réduite.
On remarquera que si $A \in \mathrm{GL}(2, D)$ est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux (a_1, a_2), alors on a

$$\det_G(A) = \mathrm{Nrm}(a_1) \cdot \mathrm{Nrm}(a_2). \tag{2}$$

Pour plus de détails, on pourra se reporter au §12 n°3 de [Bou58], au §4 de [Bou58], ainsi qu'au paragraphe 16 de [Pie82].

Un autre morphisme dérivé du déterminant va aussi entrer en jeu lorsque l'on s'intéressera aux représentations de $\mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_D)$. Il s'agit de la composée

$$\overline{\det} : \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_D) \to \mathrm{GL}(2, k_D) \xrightarrow{\det} k_D^\times,$$

où la première application est la projection canonique $K \to K/K(1)$, qui correspond concrètement à la réduction modulo (ϖ) coefficient par coefficient.
On fait la remarque que si on note N_{k_D/k_F} la norme de l'extension galoisienne k_D/k_F, alors on peut vérifier la compatibilité que résume le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_D) \arrow[r, "\overline{\det}"] \arrow[d, "\det_G"'] & k_D^\times \arrow[d, "N_{k_D/k_F}"] \\ \mathcal{O}_F^\times \arrow[r, "\overline{\cdot}"] & k_F^\times \end{tikzcd} .$$

2.5 Représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(2, k_D)$

On rappelle ici les principales propriétés des représentations irréductibles de $\overline{K} = \mathrm{GL}(2, k_D)$. On se référera au paragraphe 1 de [BL94] pour les preuves.

On commence par exhiber quelques représentations de $\overline{K}$. On peut former les puissances symétriques $\mathrm{Sym}^r\, \overline{\mathbb{F}}_p^2$ de la représentation standard de $\overline{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p^2$, pour $r \geq 0$. L'espace $\mathrm{Sym}^r\, \overline{\mathbb{F}}_p^2$ est celui des polynômes homogènes de degré r en deux variables ; il a donc dimension $(r + 1)$ et admet

$$X^r, X^{r-1}Y, X^{r-2}Y^2, \ldots, XY^{r-1}, Y^r$$

comme base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. L'action de $\overline{K}$ sur cette base est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^{r-i}Y^i = (aX+cY)^{r-i}(bX+dY)^i.$$

Ensuite, on peut tordre cette action par le Frobenius absolu $\varphi_0 : x \mapsto x^p$ et ses puissances : l'action de $\overline{K}$ sur $\left(\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2\right)^{\varphi_0^j}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^{r-i}Y^i = (a^{p^j}X+c^{p^j}Y)^{r-i}(b^{p^j}X+d^{p^j}Y)^i.$$

Pour tout vecteur $\vec{r} = (r_0, \ldots, r_{fd-1}) \in [0, p-1]^{fd}$, on forme la représentation

$$\mathrm{Sym}^{\vec{r}}\, \overline{\mathbb{F}}_p^2 = \bigotimes_{j=0}^{fd-1} \left(\mathrm{Sym}^{r_j} \overline{\mathbb{F}}_p^2\right)^{\varphi_0^j}$$

de dimension $\prod_j (r_j+1)$ de $\overline{K}$. Enfin on peut tordre cette représentation par un caractère de $\overline{K}$. Il se trouve que ce procédé permet de construire toutes les représentations irréductibles de $\overline{K}$.

Proposition 2.1 *Les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\overline{K}$ sont en bijection via*

$$(\vec{r}, \chi) \mapsto V(\vec{r}, \chi) = (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{Sym}^{\vec{r}}\, \overline{\mathbb{F}}_p^2$$

avec les paires $(\vec{r}, \chi)$ où $\vec{r}$ est un élément de $[0, p-1]^{fd}$ et χ est un caractère $k_D^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

Il est important de décrire l'espace d'invariants ou de coinvariants de ces représentations par

$$\overline{U} = (U \cap K)/(U \cap K(1)), \quad \overline{U}^- = (U^- \cap K)/(U^- \cap K(1)).$$

De même, on note

$$\overline{B} = (B \cap K)/(B \cap K(1)), \quad \overline{B}^- = (B^- \cap K)/(B^- \cap K(1)).$$

Enfin, pour $\vec{s} = (s_0, \ldots, s_{fd-1}) \in [0, p-1]^{fd}$ avec $s_i \leq r_i$ pour tout i, on note

$$X^{\vec{s}} = X^{s_0} \otimes X^{s_1} \otimes \cdots \otimes X^{s_{fd-1}} \in \mathrm{Sym}^{\vec{r}}\, \overline{\mathbb{F}}_p^2,$$

et de même pour $Y^{\vec{s}}$; et pour $x \in k_D^\times$, on écrit

$$x^{\vec{s}} = x^{s_0}(x^p)^{s_1} \ldots (x^{p^{fd-1}})^{s_{fd-1}} = x^{s_0+ps_1+\cdots+p^{fd-1}s_{fd-1}}. \tag{3}$$

Lemme 2.2 *Soient $\vec{r} \in [0, p-1]^{fd}$ et χ un caractère de $k_D^\times$.*

(i) L'espace de coinvariants $V(\vec{r}, \chi)_{\overline{U}}$ est isomorphe à l'espace d'invariants $V(\vec{r}, \chi)^{\overline{U}^-}$. Il est porté par la droite $\overline{\mathbb{F}}_p Y^{\vec{r}}$, sur laquelle l'action de $\overline{B}^-$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} Y^{\vec{r}} = \chi(ad) d^{\vec{r}} Y^{\vec{r}}.$$

(ii) L'espace d'invariants $V(\vec{r}, \chi)^{\overline{U}}$ est isomorphe à l'espace de coinvariants $V(\vec{r}, \chi)_{\overline{U}^-}$. Il est porté par la droite $\overline{\mathbb{F}}_p X^{\vec{r}}$, sur laquelle l'action de $\overline{B}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} X^{\vec{r}} = \chi(ad) a^{\vec{r}} X^{\vec{r}}.$$

Les fd-uplets $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ et $\overrightarrow{p-1} = (p-1, \ldots, p-1)$ de $[0, p-1]^{fd}$ jouent un rôle particulier. En effet, fixons un caractère χ de $k_D^\times$; les caractères $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \chi(ad)d^{\vec{r}}$ par lesquels $\overline{B}^-$ agit sur $V(\vec{r}, \chi)_{\overline{U}}$ sont deux à deux distincts sauf pour $\vec{r} = \vec{0}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{p-1}$. Aussi, suivant la dénomination de [HV12], on dira que les $V(\vec{r}, \chi)$ sont alors $\overline{B}^-$-réguliers pour $\vec{r} \neq \vec{0}$, et non $\overline{B}^-$-réguliers pour $\vec{r} = \vec{0}$. On remarque que, dans ce cas particulier de $\mathrm{GL}(2, k_D)$, une représentation irréductible de $\overline{K}$ est $\overline{B}^-$-régulière si et seulement si elle est $\overline{B}$-régulière : on dira donc tout simplement que $V(\vec{r}, \chi)$ est *régulière* pour $\vec{r} \neq \vec{0}$. Et c'est aussi équivalent au fait que V est de dimension strictement supérieure à 1.

Soit V une représentation lisse irréductible de K. Comme $K(1)$ est un pro-p-groupe, l'espace $V^{K(1)}$ des $K(1)$-invariants de V est non réduit à 0 (voir [BL94], Lemma 3). Et parce que $K(1)$ est normal dans K, $V^{K(1)}$ est une K-représentation qui est donc égale à V par irréductibilité. Ainsi l'action de K sur V se factorise par $\overline{K} = K/K(1)$. Réciproquement, toute représentation irréductible de $\overline{K}$ définit une représentation lisse irréductible de K par inflation. De ce fait, il n'y a pas lieu dans la suite de faire de distinction entre une $\overline{K}$-représentation irréductible et une K-représentation lisse irréductible.

3 Représentations irréductibles de $D^\times$

Soit V une représentation irréductible de dimension finie de $D^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Commençons par remarquer que $D(1) := 1 + \varpi\mathcal{O}_D$ est un pro-p-groupe, de sorte que $V^{D(1)}$ est non réduit à 0 (voir [BL94], Lemma 3). De plus, $D(1)$ est normalisé par $D^\times$ et donc $D^\times$ agit sur $V^{D(1)}$; par irréductibilité de V, l'action de $D^\times$ se factorise[1] par $D^\times/D(1)$, et V s'identifie à une représentation de $D^\times/D(1)$. Par la suite, on se servira de ce fait pour confondre les représentations irréductibles de $D^\times$ et celles de $D^\times/D(1)$.
Rappelons que l'on a la décomposition suivante :

$$D^\times/D(1) \simeq k_D^\times \rtimes \varpi^{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/(q^d - 1)\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} \tag{4}$$

où l'action de ϖ sur $k_D^\times$ est donnée par $x \mapsto \overline{\varpi[x]\varpi^{-1}} = x^{q_D}$ en notant $q_D := q^{a_D}$.

Soient σ un caractère de $k_D^\times$ et N_σ le stabilisateur de σ dans $D^\times/D(1)$ pour l'action via conjugaison : $\delta \in D^\times/D(1)$ envoie σ sur ${}^\delta\sigma : x \mapsto \sigma(\delta^{-1}x\delta)$. Ce stabilisateur N_σ contient $k_D^\times\varpi^{d\mathbb{Z}}$ et est donc égal à $k_D^\times \rtimes \varpi^{d_0\mathbb{Z}}$ pour un certain entier $d_0 \geq 1$ divisant d. Prolonger σ en un caractère de N_σ revient à choisir l'image de ϖ^{d_0} et, pour tout $\eta \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on note $\widetilde{\sigma}_\eta$ le caractère défini par :

$$\widetilde{\sigma}_\eta|_{k_D^\times} = \sigma \quad \text{et} \quad \widetilde{\sigma}_\eta(\varpi^{d_0}) = \eta.$$

On forme alors l'induite

$$\rho(\sigma, \eta) := \mathrm{Ind}_{N_\sigma}^{D^\times/D(1)} \widetilde{\sigma}_\eta,$$

que l'on voit aussi bien comme représentation de $D^\times/D(1)$ ou comme représentation de $D^\times$.

Proposition 3.1 *Soient σ et τ deux caractères de $k_D^\times$. Soient $\eta, \nu \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.*
(i) La représentation $\rho(\sigma, \eta)$ est irréductible.
(ii) Les induites $\rho(\sigma, \eta)$ et $\rho(\tau, \nu)$ sont isomorphes si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
(a) il existe $\delta \in D^\times/D(1)$ tel que l'on ait $\tau = {}^\delta\sigma$;
(b) on a l'égalité $\eta = \nu$.

Preuve : Voir [Ser98], paragraphe 8.2. $\square$

1. dans le langage de la théorie complexe, on peut dire que toute représentation irréductible est de niveau 0

En comparaison avec $\mathrm{GL}(2,F)$, notre description précédente de $\rho(\sigma,\eta)$ est semblable à une induite parabolique. Il nous sera utile plus tard de la voir comme une induite compacte aussi.
Pour σ un caractère de $\mathcal{O}_D^\times$, on remarque l'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels suivant pour décrire l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(D^\times,\mathcal{O}_D^\times,\sigma)$, où le second isomorphisme est la réciprocité de Frobenius

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathbb{F}}_p[\varpi^{d_0\mathbb{Z}}] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D^\times}\left(\sigma,\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^\times}^{D^\times}\sigma\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(D^\times,\mathcal{O}_D^\times,\sigma) \\ \varpi^{d_0 i} & \mapsto & \left(1\mapsto[\varpi^{-d_0 i},1]\right) & & \end{array}. \tag{5}$$

Parce que $\mathcal{O}_D^\times$ est normal dans $D^\times$, les opérateurs de $\mathcal{H}(D^\times,\mathcal{O}_D^\times,\sigma)$ sont portées par des classes simples et il s'ensuit que (5) est en fait un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres. En identifiant $\mathcal{H}(D^\times,\mathcal{O}_D^\times,\sigma)$ à $\overline{\mathbb{F}}_p[\varpi^{d_0\mathbb{Z}}]$ via (5), pour tout $\eta\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on définit un caractère de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de $\mathcal{H}(D^\times,\mathcal{O}_D^\times,\sigma)$ en posant $\chi_\eta(\varpi^{d_0 i})=\eta^i$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$.

Proposition 3.2 *Soient σ un caractère de $k_D^\times$, que l'on voit comme un caractère de $\mathcal{O}_D^\times$ par inflation, et $\eta\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. On a l'isomorphisme de représentations de $D^\times$*

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^\times}^{D^\times}\sigma\otimes_{\chi_\eta}\overline{\mathbb{F}}_p\xrightarrow{\sim}\rho(\sigma,\eta).$$

Preuve :
L'inclusion $\sigma\subseteq\rho(\sigma,\eta)$ induit par réciprocité de Frobenius une surjection $D^\times$-équivariante $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^\times}^{D^\times}\sigma\to\rho(\sigma,\eta)$ (puisque $\rho(\sigma,\eta)$ est irréductible). De plus, cette dernière se factorise par

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^\times}^{D^\times}\sigma\otimes_{\chi_\eta}\overline{\mathbb{F}}_p\to\rho(\sigma,\eta),$$

qui est un isomorphisme car les deux termes sont de dimension d_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. □

Décrivons la restriction d'une induite $\rho(\sigma,\eta)$ de dimension d_0 à $k_D^\times$. Parce que $k_D^\times$ est cyclique d'ordre premier à p et que $\overline{\mathbb{F}}_p$ est algébriquement clos, l'action de $k_D^\times$ sur $\rho(\sigma,\eta)$ est diagonalisable.

Lemme 3.3 *Soient z_0 un vecteur propre de $k_D^\times$ dans $\rho(\sigma,\eta)$ et $\xi_0\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le scalaire tel que l'on ait $\mu.z_0=\xi_0 z_0$. Alors ξ_0 appartient à $\mathbb{F}_{q^{d_0}}$ et l'engendre en tant qu'extension sur $\mathbb{F}_q$.*

Preuve :
Il s'agit de voir que ξ_0 est un élément de degré d_0 sur $\mathbb{F}_q$. Or, par (4), le fait que a_D est premier à d et la définition de d_0, le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q)$ fixant ξ_0 est topologiquement engendré par $x\mapsto x^{q^{d_0}}$. Le lemme est prouvé. □

On remarque que l'on oubliera souvent par la suite de le préciser mais on ne considère que des représentations irréductibles de dimension finie de $D^\times$. Aussi, à cause du lemme de Schur et de (4), toute représentation irréductible admissible de $D^\times$ est de dimension finie. Parmi ces représentations irréductibles de $D^\times$ que l'on vient de décrire, les caractères jouent un rôle particulier. Précisons un peu leur structure.

Lemme 3.4 *Soit ρ une représentation irréductible de $D^\times$. Alors ρ est un caractère si et seulement si il existe un caractère $\rho_0:F^\times\to\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que l'on ait $\rho=\rho_0\circ\mathrm{Nrm}$.*

Preuve :
Une représentation $\rho_0\circ\mathrm{Nrm}$ est un caractère de $D^\times$. Montrons que tout caractère ρ de $D^\times$ possède une factorisation $\rho=\rho_0\circ\mathrm{Nrm}$. Lorsque ρ est un caractère, pour tout x de $\mathcal{O}_D^\times$, on a $\rho(\varpi x\varpi^{-1})=\rho(x)$. Comme l'action par conjugaison de ϖ sur $k_D^\times$ est donnée par $y\mapsto y^{q_D}$, on a alors la factorisation

$$\rho|_{\mathcal{O}_D^\times}:\mathcal{O}_D^\times\twoheadrightarrow k_D^\times\xrightarrow{N_{k_D/k_F}}k_F^\times\xrightarrow{\overline{\rho}_0}\overline{\mathbb{F}}_p^\times, \tag{6}$$

où la première flèche est la réduction canonique et N_{k_D/k_F} est la norme de l'extension galoisienne k_D/k_F. Par la preuve de [MN43], Satz 1, (6) se réécrit

$$\begin{tikzcd} \rho|_{\mathcal{O}_D^\times} : \mathcal{O}_D^\times \arrow[r, "\mathrm{Nrm}"] & \mathcal{O}_F^\times \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "\rho_0"] & k_F^\times \arrow[r, "\overline{\rho}_0"] & \overline{\mathbb{F}}_p^\times \end{tikzcd} ,$$

où $\mathcal{O}_F^\times \twoheadrightarrow k_F^\times$ est la réduction canonique. Il reste à prolonger ρ_0 à $F^\times$ en posant

$$\rho_0\big((-1)^d \varpi_F\big) = \rho_0\big(\mathrm{Nrm}(\varpi)\big) = \rho(\varpi).$$

La preuve est terminée. $\square$

4 Généralités et $I(1)$-invariants

Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations lisses irréductibles de $D^\times$, de dimension respective d_1 et d_2. On commence par utiliser le paragraphe 3 pour expliciter des bases pour les espaces sous-jacents à ρ_1 et ρ_2 dans lesquelles l'action de $k_D^\times \hookrightarrow D^\times/D(1)$ est diagonale (voir (4)).
Soient v_0 un vecteur propre dans ρ_1 pour l'action de $k_D^\times$ et $\xi_1 \in \mathbb{F}_{q^{d_1}}^\times \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ la valeur propre associée à μ (voir lemme 3.3). On définit $v_a = \varpi^{-a}.v_0$ pour $1 \le a \le d_1 - 1$, de sorte que $(v_0, \dots, v_{d_1-1})$ forme une base de ρ_1 ; et l'action de μ est diagonale dans cette base, de valeur $\big(\xi_1, \xi_1^{q_D}, \dots, \xi_1^{q_D^{d_1-1}}\big)$.
De la même manière, pour ρ_2, on a un vecteur w_0 tel que $\mu.w_0 = \xi_2 w_0$ pour un $\xi_2 \in \mathbb{F}_{q^{d_2}}^\times \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Si on note $w_b = \varpi^{-b}.w_0$ pour $1 \le b \le d_2 - 1$, $(w_0, \dots, w_{d_2-1})$ est une base de ρ_2 dans laquelle l'action de μ est diagonale, donnée par $\big(\xi_2, \xi_2^{q_D}, \dots, \xi_2^{q_D^{d_2-1}}\big)$.

Lemme 4.1 *Soient ξ un caractère lisse de $F^\times$ et ρ_1, ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$. Alors on a l'isomorphisme de G-représentations*

$$(\xi \circ \det_G) \circ \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G\big(((\xi \circ \mathrm{Nrm}) \otimes \rho_1) \otimes ((\xi \circ \mathrm{Nrm}) \otimes \rho_2)\big).$$

Preuve : Immédiat. $\square$

L'action de ϖ^{d_1} sur ρ_1 est scalaire par la proposition 3.1. Choisissons $\xi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que $\xi(\mathrm{Nrm}\,\varpi)^{d_1} = \rho_1(\varpi^{d_1}) \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et $\xi|_{\mathcal{O}_F^\times}$ trivial : par le lemme 4.1, on est donc ramené au cas où l'action de ϖ^{d_1} sur ρ_1 est triviale, et c'est ce qu'on supposera par la suite.
Soit $V = \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$. On va tâcher dans la suite de cette section de préparer l'étude de l'irréductibilité de V en tant que G-représentation en énonçant des généralités sur $V^{I(1)}$.

Comme $I(1)$ est un pro-p-groupe, $V^{I(1)}$ est non réduit à 0 (voir [BL94], Lemma 3). C'est donc un objet intéressant à considérer, d'autant plus que, d'après la réciprocité de Frobenius,

$$V^{I(1)} \simeq \mathrm{Hom}_{I(1)}(\mathbb{1}, V) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{I(1)}^G \mathbb{1}, V) \tag{7}$$

est naturellement muni d'une structure de module à droite sur $\mathcal{H}(G, I(1))$. Explicitement, pour $g \in G$, l'opérateur T_g de $\mathcal{H}(G, I(1))$ de support $I(1)gI(1)$ et valant id en g agit sur $V^{I(1)}$ par

$$v \mapsto vT_g = \sum_{\gamma \in I(1)\backslash I(1)gI(1)} \gamma^{-1} v = \sum_{u \in (I(1) \cap g^{-1} I(1) g)\backslash I(1)} u^{-1} g^{-1} v. \tag{8}$$

Un tel opérateur T_g est caractérisé par son support et on dira parfois simplement que T_g est la fonction caractéristique de $I(1)gI(1)$.

Regardons l'espace des $I(1)$-invariants de V : en utilisant successivement les décomposition d'Iwasawa et de Bruhat, on a

$$G = BI(1) \coprod B\omega I(1). \tag{9}$$

On fait remarquer que l'on préfère écrire $B\omega I(1)$ plutôt que $BsI(1)$ car ω a le bon goût de normaliser $I(1)$.
Comme l'espace sous-jacent à $\rho_1 \otimes \rho_2$ est de dimension $d_1 d_2$, on en déduit que $V^{I(1)}$ est de dimension $e := 2d_1 d_2$. Pour $0 \leq a \leq d_1 - 1$ et $0 \leq b \leq d_2 - 1$ et $i = 0, 1$, soit $f^i_{a,b} \in V$ la fonction $I(1)$-invariante de support $B\omega^i I(1)$ et prenant la valeur $v_a \otimes w_b$ en ω^i. La famille $\mathcal{F} := (f^i_{a,b})_{i,a,b}$ (ordonnée lexicographiquement) forme une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $V^{I(1)}$.

Proposition 4.2 *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$. L'induite parabolique $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ est admissible.*

Preuve :
Par la discussion précédente, $(\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2)^{I(1)}$ est de dimension finie, égale à $2d_1 d_2$. Comme $I(1)$ est un pro-p-sous-groupe ouvert du groupe localement profini G, le résultat suit de [Pas04], Theorem 6.3.2. □

Lemme 4.3 *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$.*
(i) La représentation $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ est générée en tant que B-représentation par ses $I(1)$-invariants.
(ii) Soit π une représentation de G générée par ses $I(1)$-invariants. Si $\pi^{I(1)}$ est simple en tant que module à droite sur $\mathcal{H}(G, I(1))$, alors π est irréductible.

Preuve :
Pour le (ii), voir [Vig04] Criterium 4.5. Le (i) se trouve dans [Vig08], Proposition 9 pour une induite de caractères ; cependant, la preuve reste valable pour une induite parabolique de représentation de dimension finie[2]. Réexpliquons l'argument, qui est d'autant plus simplifié que le groupe ici considéré est de rang relatif 1.
Soit f une fonction non nulle de $V = \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$. Rappelons la décomposition

$$G = B \coprod BsU = B \coprod B\omega U, \tag{10}$$

dérivée de la décomposition de Bruhat. Parce que BU^- est dense dans G, si la valeur de f en 1 n'est pas nulle, il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $B\overline{n}(\varpi^{k_0}\mathcal{O}_D)$ est dans le support de f. Aussi, on a

$$B\overline{n}(\varpi^{k_0}\mathcal{O}_D) = B\varphi_2^{k_0-1} I(1) \varphi_2^{1-k_0} = BI(1)\varphi_2^{1-k_0}.$$

Il existe alors des $\lambda^0_{a,b} \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tels que la fonction

$$g := f - \varphi_2^{k_0-1}.\Big(\sum_{a,b} \lambda^0_{a,b} f^0_{a,b}\Big) \tag{11}$$

prenne la valeur 0 en 1 ; par la décomposition (10), elle est donc à support dans $B\omega U$.
Soit $k_1 \geq 0$ un entier tel que $n(\varpi^{k_1}\mathcal{O}_D) \subseteq U$ soit un sous-groupe du stabilisateur de g dans G : un tel k_1 existe par lissité de V. Ecrivons le support de g sous la forme

$$\coprod_{i \in \mathcal{I}_g} B\omega n(a_i + \varpi^{k_1}\mathcal{O}_D),$$

où $\mathcal{I}_g$ est fini et les $a_i \in D$ sont distincts modulo (ϖ^{k_1}) ; on remarque que g est constante sur chaque $\omega n(a_i + \varpi^{k_1}\mathcal{O}_D)$ par choix de k_1. Aussi, on a pour tout $i \in \mathcal{I}_g$:

$$B\omega n(a_i + \varpi^{k_1}\mathcal{O}_D) = B\omega\varphi_1^{k_1} I(1) \varphi_1^{-k_1} n(a_i) = B\omega I(1)\varphi_1^{-k_1} n(a_i); \tag{12}$$

2. et même en général : on a uniquement besoin de la surjectivité de $\begin{array}{ccc} (\mathrm{Ind}_B^G \rho)^{I(1)} & \to & \rho \times \rho \\ f & \mapsto & (f(1), f(\omega)) \end{array}$

et cet ensemble est le support de la fonction $n(-a_i)\varphi_1^{k_1}.f_{a,b}^1$. Parce que les supports (12) sont distincts, il existe des scalaires $\lambda_{a,b}^i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tels que la fonction

$$g_1 := g - \sum_{i\in\mathcal{I}_g} n(-a_i)\varphi_1^{k_1}.\Big(\sum_{a,b} \lambda_{a,b}^i f_{a,b}^1\Big) \tag{13}$$

s'annule sur les $B\omega n(a_i + \varpi^{k_1}\mathcal{O}_D)$ pour tout $i \in \mathcal{I}_g$: la fonction g_1 est identiquement nulle. En observant (11) et (13), le résultat est prouvé. $\square$

Le pro-p-Iwahori $I(1)$ vérifie bien le fait que toute double classe $I(1)gI(1)$ est union finie de classes simples à droite. De ce fait, par le paragraphe 2.1, on peut voir $\mathcal{H}(G, I(1))$ comme la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre des fonctions sur G à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ et qui sont bi-$I(1)$-invariantes et à support compact ; et c'est ce que l'on fera par la suite. Ainsi $\mathcal{H}(G, I(1))$ est engendrée vectoriellement par les fonctions caractéristiques des doubles classes $I(1)gI(1)$ pour $g \in G$, que l'on notera $\mathbb{1}_{I(1)gI(1)}$. Précisons un peu les générateurs de $\mathcal{H}(G, I(1))$ en tant que $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre.
Notons C le sous-groupe de G composé des matrices monomiales (c'est-à-dire ayant un seul coefficient non nul par ligne et par colonne). La décomposition de Bruhat pour la BN-paire (I, C) nous donne

$$G = \coprod_{a,b\in\mathbb{Z},\, i\in\{0,1\}} I \begin{pmatrix} \varpi^a & 0 \\ 0 & \varpi^b \end{pmatrix} s^i I = \coprod_{a,b\in\mathbb{Z},\, i\in\{0,1\}} I(1) \begin{pmatrix} \varpi^a & 0 \\ 0 & \varpi^b \end{pmatrix} s^i I.$$

On peut réécrire cela en

$$G = \coprod_{b,i,j,x,y} I(1)\omega^i\varphi_2^b\omega^j\delta_y^x I(1), \tag{14}$$

où les indices parcourent $b \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \{0, 1\}$ et $x, y \in \mathcal{O}_D^\times$. Parce que ω et $A \cap K$ normalisent $I(1)$, on a les égalités :

$$I(1)\omega I(1) = \omega I(1) = I(1)\omega, \quad I(1)\delta_y^x I(1) = \delta_y^x I(1) = I(1)\delta_y^x \tag{15}$$

pour tous $x, y \in \mathcal{O}_D^\times$. On a alors

$$I(1)\omega^i\varphi_2^b\omega^j\delta_y^x I(1) = (I(1)\omega I(1))^i(I(1)\varphi_2^b I(1))(I(1)\omega I(1))^j(I(1)\delta_y^x I(1)). \tag{16}$$

Il en découle l'énoncé suivant.

Lemme 4.4 *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G, I(1))$ est de type fini, engendrée par les opérateurs $\mathbb{1}_{\omega^{\pm1}I(1)}$, $\mathbb{1}_{I(1)sI(1)}$ et les $\mathbb{1}_{\delta_{[y]}^{[x]}I(1)}$ pour $x, y \in k_D^\times$.*

Preuve :
Grâce à (14), on sait que $\mathcal{H}(G, I(1))$ est engendrée vectoriellement par les fonctions caractéristiques des doubles classes (16). Aussi, les égalités (16) et (15) impliquent que $\mathcal{H}(G, I(1))$ est engendrée en tant qu'algèbre par $\mathbb{1}_{\omega^{\pm1}I(1)}$, les $\mathbb{1}_{I(1)\varphi_2^b I(1)}$ pour $b \geq 0$ et les $\mathbb{1}_{\delta_y^x I(1)}$ pour $x, y \in \mathcal{O}_D^\times$. En effet, on voit par exemple que l'on a, par définition (1) pour $g \in G$:

$$\mathbb{1}_{I(1)\omega^i I(1)} * \mathbb{1}_{I(1)\varphi_2^b I(1)}(g) = \mathbb{1}_{\omega^i I(1)}(\omega^i)\mathbb{1}_{I(1)\varphi_2^b I(1)}(\omega^{-i}g) = \mathbb{1}_{I(1)\omega^i\varphi_2^b I(1)}(g); \tag{17}$$

et les autres produits voulus s'obtiennent de manière identique. De plus, en utilisant successivement l'identité

$$I(1)\varphi_2 I(1) = \coprod_{x\in k_D} I(1)\varphi_2 n([x])$$

et parce que l'on a l'égalité d'ensembles (pour $b \geq 1$)

$$\{\varphi_2^b n([x]) \mid x \in k_D^b\} = \{\varphi_2 n([x_0])\varphi_2 n([x_1])\varphi_2 \ldots \varphi_2 n([x_{b-1}]) \mid x_0, \ldots, x_{b-1} \in k_D\},$$

on en déduit l'égalité de doubles classes

$$I(1)\varphi_2^b I(1) = \coprod_{x\in k_D^b} I(1)\varphi_2^b n([x]) = \big(I(1)\varphi_2 I(1)\big)^b.$$

De cette manière, le support de la b-ème convolée

$$\big(\mathbb{1}_{I(1)\varphi_2 I(1)}\big)^{*b} := \mathbb{1}_{I(1)\varphi_2 I(1)} * \mathbb{1}_{I(1)\varphi_2 I(1)} * \cdots * \mathbb{1}_{I(1)\varphi_2 I(1)}$$

est inclus dans $I(1)\varphi_2^b I(1)$. On peut facilement établir par récurrence sur $b \geq 1$ que sa valeur en φ_2^b est 1. En particulier, on sait à présent que $\mathbb{1}_{\omega^{\pm 1} I(1)}$, $\mathbb{1}_{I(1)\varphi_2 I(1)}$ et les $\mathbb{1}_{\delta_y^x I(1)}$ pour $x, y \in \mathcal{O}_D^\times$ génèrent l'algèbre $\mathcal{H}(G, I(1))$. Il reste à remarquer $\delta_y^x I(1) = \delta_{[\overline{y}]}^{[\overline{x}]} I(1)$ pour se limiter aux $\mathbb{1}_{\delta_{[y]}^{[x]} I(1)}$; et à la manière de (17), grâce (15) et à $\varphi_2 = \omega s$, on a l'identité

$$\mathbb{1}_{I(1)\varphi_2 I(1)} = \mathbb{1}_{\omega I(1)} * \mathbb{1}_{I(1) s I(1)}.$$

Le résultat est prouvé. □

Remarquons que l'on aurait très bien pu garder $\mathbb{1}_{I(1)\varphi_2 I(1)}$ au lieu de $\mathbb{1}_{I(1) s I(1)}$ parmi les générateurs exhibés de $\mathcal{H}(G, I(1))$ mais il se trouve que la littérature a tendance à favoriser le second (car il fait sens dans un contexte de groupes finis aussi).

Pour $n \geq 1$ et $\nu \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, soit $C_n(\nu) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \nu^{-1} & & & 0 \end{pmatrix}$ la matrice cyclique et 1_n la matrice identité de $M_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. On pose alors

$$H_\omega(\nu) := \begin{pmatrix} 0 & 1_{d_1 d_2} \\ C_{d_1}(1) \otimes C_{d_2}(\nu) & 0 \end{pmatrix},$$

qui est une matrice de $M_e(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Pour $x, y \in \mathcal{O}_D^\times$, on note $\Delta(x,y) \in M_{d_1 d_2}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ la matrice diagonale de coefficients $\big(\xi_1^{\{\overline{x}^{q_D^{i_1}}\}} \xi_2^{\{\overline{y}^{q_D^{i_2}}\}}\big)_i$ pour $0 \leq i < d_1 d_2$ de division euclidienne $i = i_1 d_2 + i_2$, $0 \leq i_2 < d_2$. On pose alors

$$H_\delta(x,y) := \begin{pmatrix} \Delta(x,y) & 0 \\ 0 & \Delta(y, x^{q_D}) \end{pmatrix} \in M_e(\overline{\mathbb{F}}_p).$$

Lorsque l'on a $d_1 = d_2$, on note $S_k \in M_{d_1 d_2}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, pour $0 \leq k < d_1$ un entier, la matrice définie par

$$S_k(v_a \otimes w_b) = \delta_{a+k, b+1}\, v_a \otimes w_b,$$

où δ désigne le symbole de Kronecker, valant 1 si et seulement si $a + k$ est égal à $b + 1$ modulo d_1. On définit alors, pour $\nu \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$,

$$H_s(\nu, \varepsilon) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{d_1} \otimes C_{d_2}(\nu) & \varepsilon S_k \end{pmatrix} & \text{si } d_1 = d_2 \text{ et } \rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times} = \rho_2(\varpi^k \cdot \varpi^{-k})|_{\mathcal{O}_D^\times}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{d_1} \otimes C_{d_2}(\nu) & 0 \end{pmatrix} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On fait la remarque qu'un tel entier $0 \leq k < d_1$ est uniquement déterminé (s'il a lieu d'être). On rappelle aussi que l'on a posé $\lambda = \rho_2(\varpi^{d_2})^{-1} \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ au début du paragraphe 4. De plus, la valeur de $-\rho_1(-1)$ est

un élément de $\{\pm 1\}$, que l'on va noter τ.
Enfin, pour $x, y \in \mathcal{O}_D^\times$, on note de la manière suivante les opérateurs de $\mathcal{H}(G, I(1))$:

$$\Delta_y^x = \mathbb{1}_{(\delta_y^x)^{-1}I(1)}, \quad T^{(-1)} = \mathbb{1}_{\omega^{-1}I(1)}, \quad S = \mathbb{1}_{I(1)sI(1)}.$$

Par le lemme 4.4, les Δ_y^x, $(T^{(-1)})^{\pm 1}$ et S engendrent $\mathcal{H}(G, I(1))$. On va maintenant calculer l'action de ces opérateurs sur $V^{I(1)}$.

Lemme 4.5 *Soient $\rho_1, \rho_2, V, \lambda, \tau$ comme précédemment. Soient x et y des éléments de $\mathcal{O}_D^\times$. Dans la base $\mathcal{F}$, les actions des opérateurs Δ_y^x, $T^{(-1)}$ et S sur $V^{I(1)}$ sont respectivement données[3] par $H_\delta(x, y)$, $H_\omega(\lambda)$ et $H_s(\lambda, \tau)$.*

Preuve :
Comme on a la décomposition (9), les fonctions images des $f_{a,b}^i$ par chacun de ces opérateurs sont uniquement déterminées par leur valeur en 1 et en ω. Les actions de Δ_y^x et $T^{(-1)}$ sont faciles à calculer puisque ces opérateurs sont de support une simple classe (voir (15)). Par exemple, en se rappelant la formule d'action (8) et $\omega^2 = \varpi$, on a :

$$\begin{gathered}
\left(f_{a,b}^0.T^{(-1)}\right)(1) = f_{a,b}^0(\omega) = 0, \\
\left(f_{a,b}^0.T^{(-1)}\right)(\omega) = f_{a,b}^0(\varpi) = (\rho_1(\varpi) \otimes \rho_2(\varpi))\, v_a \otimes w_b, \\
\left(f_{a,b}^1.T^{(-1)}\right)(1) = f_{a,b}^1(\omega) = v_a \otimes w_b, \\
\left(f_{a,b}^1.T^{(-1)}\right)(\omega) = f_{a,b}^1(\varpi) = 0.
\end{gathered}$$

Pour Δ_y^x, cela résulte de la discussion au début du paragraphe 4 et de l'identité $\omega \delta_y^x \omega^{-1} = \delta_{\varpi x \varpi^{-1}}^y$. Pour S par contre, le calcul est moins immédiat. On écrit la décomposition

$$I(1)sI(1) = \coprod_{x \in k_D} I(1)sn([-x]),$$

ainsi que les relations $n([x])s = \begin{pmatrix} 1 & [x]\varpi^{-1} \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix} \omega$ et

$$\omega n([x])s = \begin{cases} \begin{pmatrix} -[x]^{-1} & \varpi^{-1} \\ 0 & \varpi[x]\varpi^{-1} \end{pmatrix} \omega n([x]^{-1}) & \text{si } x \neq 0, \\ \varphi_2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Parce que $|k_D|$ est divisible par p, on a :

$$\begin{gathered}
\left(f_{a,b}^0.S\right)(1) = \sum_{x \in k_D} f_{a,b}^0(n([x])s) = 0, \\
\left(f_{a,b}^0.S\right)(\omega) = \sum_{x \in k_D} f_{a,b}^0(\omega n([x])s) = (1 \otimes \rho_2(\varpi))\, v_a \otimes w_b, \\
\left(f_{a,b}^1.S\right)(1) = \sum_{x \in k_D} f_{a,b}^1(n([x])s) = \sum_{x \in k_D} (1 \otimes \rho_2(\varpi)^{-1})\, v_a \otimes w_b = 0.
\end{gathered}$$

Enfin, on calcule

$$\left(f_{a,b}^1.S\right)(\omega) = \sum_{x \in k_D} f_{a,b}^1(\omega n([x])s) = \rho_1(-1) \sum_{x \in k_D^\times} (\rho_1([x])^{-1} \otimes \rho_2(\varpi[x]\varpi^{-1}))\, v_a \otimes w_b. \tag{18}$$

3. les images des vecteurs de base sont données par les colonnes des matrices respectives bien que les actions soient à droite

Dans cette dernière égalité, on a mis $\rho_1(-1)$ en facteur puisque, -1 étant central dans $D^\times$, $\rho_1(-1)$ agit par un scalaire. On commence par remarquer que l'action de $\mathcal{O}_D^\times$ à travers $\rho_1^{-1}\otimes\rho_2(\varpi\cdot\varpi^{-1})$ sur l'espace $|\rho_1\otimes\rho_2|$ est diagonale et qu'il n'existe pas d'entier $0\le k<d_2$ avec $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times}=\rho_2(\varpi^k\cdot\varpi^{-k})|_{\mathcal{O}_D^\times}$ si d_1 et d_2 sont distincts (puisque les stabilisateurs dans $D^\times$ des caractères de $\mathcal{O}_D^\times$ les composant sont distincts). Supposons dans un premier temps $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times}=\rho_2(\varpi^k\cdot\varpi^{-k})|_{\mathcal{O}_D^\times}$ pour un certain entier $0\le k<d_2$; c'est équivalent à la condition $\xi_2^{q_D^k}=\xi_1$ (en particulier $d_1=d_2$). Si on a $b+1=a+k$ modulo d_1, pour tout $x\in k_D^\times$, on a

$$\begin{aligned}(\rho_1([x])^{-1}\otimes\rho_2(\varpi[x]\varpi^{-1}))\,v_a\otimes w_b &= \xi_1^{-\{x^{q_D^a}\}}\xi_2^{\{x^{q_D^{b+1}}\}}\,v_a\otimes w_b\\ &= \xi_1^{-\{x^{q_D^a}\}}\xi_2^{\{x^{q_D^{a+k}}\}}\,v_a\otimes w_b = v_a\otimes w_b.\end{aligned}$$

Alors (18) est une somme de (q^d-1) termes identiques et on a

$$\big(f^1_{a,b}.S\big)(\omega)=\tau\,v_a\otimes w_b.$$

Si on a $b+1\neq a+k$ modulo d_1, pour tout générateur y de $k_D^\times$, l'action de $\rho_1([y])^{-1}\otimes\rho_2(\varpi[y]\varpi^{-1})$ sur $v_a\otimes w_b$ est donnée par un scalaire différent de 1. Mais alors (18) vaut

$$\sum_{j=1}^{q^d-1}\big(\rho_1([y])^{-1}\otimes\rho_2(\varpi[y]\varpi^{-1})\big)^j\,v_a\otimes w_b=0. \tag{19}$$

Supposons maintenant $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times}\neq\rho_2(\varpi^k\cdot\varpi^{-k})|_{\mathcal{O}_D^\times})$ pour tout entier $0\le k<d_2$. Alors, pour tout générateur y de $k_D^\times$, $\rho_1([y])^{-1}\otimes\rho_2(\varpi[y]\varpi^{-1})$ agit sur $v_a\otimes w_b$ par un scalaire différent de 1. Comme en (19), pour tous a et b, on a alors $(f^1_{a,b}.S)(\omega)=0$. □

5 Représentations de Steinberg

Soit ρ une représentation irréductible de dimension 1 (autrement dit un caractère) de $D^\times$. Par le lemme 3.4, il existe un caractère lisse ρ_0 de $F^\times$ tel que ρ se factorise en $\rho=\rho_0\circ\mathrm{Nrm}$. Grâce à (2), le morphisme de groupes $\det_G$ nous permet de définir une injection

$$\rho_0\circ\det_G\hookrightarrow \mathrm{Ind}_B^G\big(\rho_0\circ\det_G\big)=\mathrm{Ind}_B^G\,\rho\otimes\rho. \tag{20}$$

Définissons la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_B\rho_0$ de G comme la représentation quotient de $\mathrm{Ind}_B^G\,\rho\otimes\rho$ par $\rho_0\circ\det_G$. Par le lemme 4.1 et parce que la tensorisation par un caractère de G est exacte, on a :

$$\mathrm{St}_B\rho_0\simeq(\rho_0\circ\det_G)\otimes\mathrm{St}_B\mathbb{1}. \tag{21}$$

Cette identité aurait pu servir pour définir $\mathrm{St}_B\rho_0$ de manière équivalente, et elle permet de ramener l'étude au cas du caractère trivial.

Lemme 5.1 *La représentation* $\mathrm{Ind}_B^G\,\mathbb{1}$ *contient une unique représentation propre et non nulle, la représentation triviale* $\mathbb{1}$.

Preuve :
Notons $V:=\mathrm{Ind}_B^G\,\mathbb{1}$. Le fait que V contienne $\mathbb{1}$ vient de (20) ; venons-en à l'unicité. Soit W une sous-représentation non nulle et propre de V. Parce que $I(1)$ est un pro-p-groupe, $W^{I(1)}$ n'est pas réduit à 0. Et comme V est engendrée par ses $I(1)$-invariants (lemme 4.3), qui forment un espace de dimension 2, $W^{I(1)}$ est en fait une droite. Aussi, le lemme 4.5 nous donne explicitement l'action de l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori sur $V^{I(1)}$. On cherche ainsi une droite de $V^{I(1)}$ stable sous l'action (à gauche) des trois matrices :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

La seule telle droite est $\overline{\mathbb{F}}_p(f^0_{0,0}+f^1_{0,0}) = W^{I(1)}$. Mais cette dernière engendre précisément $W = \mathbb{1}$, et cela fournit l'unicité voulue. $\square$

Pour prouver l'irréductibilité de $\mathrm{St}_B\mathbb{1}$, on va exhiber un sous-espace des fonctions de U dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui lui est isomorphe en tant que B-représentation. On dit qu'une fonction f sur U à valeurs dans un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel L est lisse s'il existe un sous-groupe ouvert U' de U tel que $f(u\cdot)$ est constante sur U' pour tout $u \in U$. On remarque que $t := \varphi_1^d$ contracte strictement U et on note $U_n = t^n U_0 t^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; de cette manière, les U_n forment une base de voisinages ouverts de U. En particulier, une fonction f sur U à valeurs dans L est lisse si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(u\cdot)$ est constante sur U_n pour tout $u \in U$. Soit $C_c^\infty(U)$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel des fonctions lisses à support compact sur U, à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. On note

$$\iota_U : U \xrightarrow{\sim} B\backslash B\omega U$$

l'isomorphisme topologique induit par $u \mapsto \omega u$. On fait de $C_c^\infty(U)$ une B-représentation en faisant agir $b \in B$ par :

$$f \mapsto \big(u \mapsto f(\iota_U^{-1}(\iota_U(u)b))\big). \tag{22}$$

En particulier, on remarque que U agit sur $C_c^\infty(U)$ par translation à droite et $a \in A$ agit par conjugaison : $f \mapsto f(a^{-1}\cdot a)$.

Proposition 5.2

(i) La B-représentation $C_c^\infty(U)$ est isomorphe à $\mathrm{St}_B\mathbb{1}$ et est irréductible en tant que représentation de B. La G-représentation $\mathrm{St}_B\mathbb{1}$ est alors irréductible.

(ii) La suite exacte de G-représentations

$$0 \to \mathbb{1} \to \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1} \to \mathrm{St}_B\mathbb{1} \to 0 \tag{23}$$

est non scindée.

Remarque : La preuve du *(i)* prouve même que la restriction de $C_c^\infty(U)$ à $t^{\mathbb{Z}}U$ est irréductible.

Preuve :

On va prouver l'irréductibilité dans *(i)* à la manière du Théorème 5 de [Vig08]. Soient W un sous-espace non nul de $C_c^\infty(U)$ stable par B et f un élément non nul de W. Parce que f est à support compact et que la famille $(U_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est décroissante et recouvre U, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que le support de f soit inclus dans U_m. Mais alors, le sous-espace W_m de W constitué des fonctions à support contenu dans U_m n'est pas réduit à 0. Parce que U_m est un pro-p-groupe, $W_m^{U_m}$ contient aussi un vecteur non nul : à multiplication par un scalaire près, c'est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{U_m}$ de U_m. A fortiori W contient $\mathbb{1}_{U_m}$, et donc les $ut^n.\mathbb{1}_{U_m} = \mathbb{1}_{U_{m-n}u}$ pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in U$. Enfin, parce que toute fonction h de $C_c^\infty(U)$ est lisse à support compact, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que h soit combinaison linéaire finie des $\mathbb{1}_{U_k u}$ pour $u \in U$. On a donc $W = C_c^\infty(U)$ et $C_c^\infty(U)$ est irréductible en tant que B-représentation.

La décomposition de Bruhat

$$G = B \coprod B\omega U, \tag{24}$$

le fait que la suite exacte (23) de représentations de G (donc de B) définisse $\mathrm{St}_B\mathbb{1}$ et l'action (22) montrent que la flèche

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{St}_B\mathbb{1} & \to & C_c^\infty(U) \\ f & \mapsto & (u \mapsto f(\omega u)) \end{array} \tag{25}$$

est un isomorphisme de B-représentations. Ainsi $\mathrm{St}_B\mathbb{1}$ est B-irréductible, et donc G-irréductible. La suite exacte (23) de G-représentations est non scindée à cause du lemme 5.1. $\square$

Le même énoncé est valable après torsion par un caractère de G.

Corollaire 5.3 *Soient ρ_0 un caractère de $F^\times$ et $\rho = \rho_0 \circ \mathrm{Nrm}$. La suite exacte de G-représentations*

$$0 \to \rho_0 \circ \det_G \to \mathrm{Ind}_B^G \rho \otimes \rho \to \mathrm{St}_B\rho_0 \to 0$$

est non scindée et fait de $\mathrm{Ind}_B^G \rho\otimes\rho$ une extension non triviale entre deux représentations irréductibles.

Bien que l'on sache que $\mathrm{Ind}_B^G \rho \otimes \rho$ est admissible (voir proposition 4.2), l'admissibilité du quotient $\mathrm{St}_B\rho_0$ n'est pas automatique. Lorsque F est un corps p-adique, on peut invoquer [Vig11]. Ici, on fait l'argument suivant.

Proposition 5.4 *Soit ρ_0 un caractère de $F^\times$.*
(i) L'espace des $I(1)$-invariants $\left(\mathrm{St}_B\rho_0\right)^{I(1)}$ est de dimension 1.
(ii) La G-représentation $\mathrm{St}_B\rho_0$ est admissible.

Preuve :
Parce que $I(1)$ est un pro-p-sous-groupe ouvert du groupe localement profini G, *(i)* implique directement l'admissibilité de $\mathrm{St}_B\rho_0$ par [Pas04], Theorem 6.3.2. Comme on a l'isomorphisme (21) de G-représentations et que $I(1)$ agit trivialement sur $\rho_0 \circ \det_G$, les espaces $\left(\mathrm{St}_B\rho_0\right)^{I(1)}$ et $\left(\mathrm{St}_B\mathbb{1}\right)^{I(1)}$ sont de même dimension. On va donc supposer $\rho_0 = \mathbb{1}$ par la suite.
En appliquant le foncteur exact à gauche des $I(1)$-invariants à la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{1} \to \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1} \to \mathrm{St}_B\mathbb{1} \to 0,$$

on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathbb{1} \to \left(\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1}\right)^{I(1)} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \left(\mathrm{St}_B\mathbb{1}\right)^{I(1)}. \tag{26}$$

L'espace $\left(\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1}\right)^{I(1)}$ est de dimension 2 par la discussion avant la proposition 4.2 et on veut montrer que (26) se complète en une suite exacte courte, ce qui donnera un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels

$$\mathbb{1} \oplus \left(\mathrm{St}_B\mathbb{1}\right)^{I(1)} \xrightarrow{\sim} \left(\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1}\right)^{I(1)} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p^2$$

et le *(i)* comme voulu.
Explicitement, prenons un élément $f \in \left(\mathrm{St}_B\mathbb{1}\right)^{I(1)}$ et montrons que f se relève en un élément de $\left(\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1}\right)^{I(1)}$ pour assurer la surjectivité de pr. On prend un relèvement de f en une fonction $\widetilde{f} \in \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1}$, et on va montrer que $\widetilde{f}$ est invariante par $I(1)$. Parce que f est invariante par $I(1)$, pour tout $i \in I(1)$, il existe une constante $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ telle que l'on a $\widetilde{f}(\cdot\, i) = \widetilde{f} + \lambda_i$. On sait que l'on peut écrire tout $i \in I(1)$ sous la forme $i = i^- i^+$ avec $i^- \in U^- \cap I(1)$ et $i^+ \in B \cap I(1)$. On écrit ensuite

$$\lambda_i = \widetilde{f}(\omega i) - \widetilde{f}(\omega) = \widetilde{f}(\omega i^- \omega^{-1} \omega i^+) - \widetilde{f}(\omega).$$

Parce que $\omega i^- \omega^{-1}$ est dans B et que $\widetilde{f}$ est B-invariante à gauche, on obtient

$$\lambda_i = \widetilde{f}(\omega i^+) - \widetilde{f}(\omega) = \lambda_{i^+}. \tag{27}$$

Maintenant on sait, par définition de λ_{i^+} et par B-invariance à gauche :

$$\lambda_{i^+} = \widetilde{f}(i^+) - \widetilde{f}(1) = 0. \tag{28}$$

La coordination de (27) et (28) implique que λ_i est nulle pour tout $i \in I(1)$. Il s'ensuit $\widetilde{f} \in \left(\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{1}\right)^{I(1)}$ et la preuve est terminée. □

6 Séries principales et restriction à B

On commence par s'intéresser aux représentations irréductibles de dimension finie de G.

Lemme 6.1 *Toute représentation lisse de dimension finie de G se factorise par* $\det_G$.

Preuve :
Il existe un sous-groupe compact ouvert H de G tel que la restriction de ρ à H est triviale. Mais alors, le noyau de ρ contient $H \cap U$ et $H \cap U^-$; et parce que ker ρ est normal dans G, en conjuguant par $\varphi_1^{\mathbb{Z}}$, il contient U et U^-. Or, par [Pie82], Lemma 16.5.a, et [MN43], Satz 1, le sous-groupe de G engendré par U et U^- est précisément le noyau de $\det_G$. Le lemme est prouvé. □

De ce fait, comme $\overline{\mathbb{F}}_p$ est algébriquement clos et $F^\times$ commutatif, si ρ est irréductible alors ρ est un caractère de G.

Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$, de dimension respective d_1 et d_2. On note $|\rho_1 \otimes \rho_2|$ l'espace sous-jacent à la B-représentation $\rho_1 \otimes \rho_2$. Comme précédemment avec la représentation de Steinberg, on va étudier $\operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ en observant sa restriction à B.
Soit $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel des fonctions lisses à support compact sur U, à valeurs dans $|\rho_1 \otimes \rho_2|$. On fait de $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$ une B-représentation en faisant agir $b \in B$ par

$$f \mapsto \big(u \mapsto \rho_1 \otimes \rho_2(\omega u b \iota_U^{-1}(\iota_U(u)b)^{-1}\omega^{-1})\, f(\iota_U^{-1}(\iota_U(u)b))\big). \tag{29}$$

On remarque que cette formule d'action fait de $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$ une sous-B-représentation de $\operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ et que l'on a la compatibilité $C_c^\infty(U, \mathbb{1}) = C_c^\infty(U)$.

On appelle *série principale* une représentation $\operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ de G qui est irréductible. Conjointement au corollaire 5.3, les séries principales sont exactement les $\operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ avec ρ_1, ρ_2 satisfaisant aux hypothèses du théorème 6.2.(ii) ci-dessous.

Théorème 6.2 *Soient ρ_1, ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$.*
(i) La B-représentation $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$ est irréductible.
(ii) Supposons $\rho_1 \nsim \rho_2$ ou $\rho_1 \otimes \rho_2$ de dimension strictement supérieure à 1. Alors $\operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ est une représentation irréductible de G.

Preuve :
On rappelle que t désigne φ_1^d, qui appartient au centre de A, et que l'on a alors

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(t^{-1} \cdot t) = \rho_1 \otimes \rho_2.$$

En tant que $t^{\mathbb{Z}}U$-représentation, $\rho_1 \otimes \rho_2$ est isomorphe à la somme directe de $d_1 d_2$ représentations triviales. En appliquant le foncteur exact [4] $C_c^\infty(U, \cdot)$, on obtient alors la décomposition en somme directe de $t^{\mathbb{Z}}U$-représentations irréductibles (par la preuve de la proposition 5.2.(i)) :

$$C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2) \simeq C_c^\infty(U)^{d_1 d_2}.$$

En particulier, l'ensemble des sous-$t^{\mathbb{Z}}U$-représentations de $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$ est en bijection avec l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $|\rho_1 \otimes \rho_2|$ via $C_c^\infty(U, \cdot)$.
Soit π une sous-B-représentation non nulle de $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$. Par le fait précédent, il existe un sous-espace vectoriel non nul W de $|\rho_1 \otimes \rho_2|$ vérifiant l'isomorphisme de $t^{\mathbb{Z}}U$-représentations

$$\pi \simeq C_c^\infty(U, W). \tag{30}$$

Soient f un élément non nul de π et $u \in U$ tel que f ne s'annule pas en u. Supposons $W \neq |\rho_1 \otimes \rho_2|$ et soit $v \in |\rho_1 \otimes \rho_2| \smallsetminus W$. Parce que $\rho_1 \otimes \rho_2$ est A-irréductible, il existe des $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et des $a_i \in A \subseteq B$ tels que l'on ait

$$\sum\nolimits_i \lambda_i\, \rho_1 \otimes \rho_2(a_i)\, f(u) = v,$$

et donc

$$\sum\nolimits_i \lambda_i \left((\omega^{-1} a_i \omega)\big(u^{-1}(\omega^{-1} a_i \omega) u (\omega^{-1} a_i^{-1} \omega)\big).f\right)(u) = v.$$

4. voir la Proposition 2.4 de [BH06] appliqué à $H = \{1\}$ et à $G = U$ localement profini

Ceci donne $v \in W$ à cause de (30), ce qui est une contradiction. On a donc $W = |\rho_1 \otimes \rho_2|$ et le *(i)* est prouvé.
Montrons maintenant *(ii)*. Soit σ une sous-G-représentation non nulle de $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$. On a la suite exacte de B-représentations

$$0 \to C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2) \to \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}} \rho_1 \otimes \rho_2 \to 0$$

provenant de (24). Supposons que σ est d'intersection nulle avec $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$. Alors σ s'injecte dans $\rho_1 \otimes \rho_2$, est donc de dimension finie et se factorise par $\det_G$ d'après le lemme 6.1. Ceci implique alors que $\rho_1 = \rho_2$ est un caractère de $D^\times$ d'après (2) et le lemme 3.4. Cela contredit les hypothèses de l'énoncé : c'est donc que σ intersecte $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$ non trivialement. Par le *(i)*, on a donc $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2) \subseteq \sigma$. De plus, comme $C_c^\infty(U, \rho_1 \otimes \rho_2)$ n'est pas stable par G, σ est d'image non nulle par pr. Et comme $\rho_1 \otimes \rho_2$ est B-irréductible, $\mathrm{pr}(\sigma)$ est égal à $\rho_1 \otimes \rho_2$. Au final, σ est égal à $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ et *(ii)* en résulte. $\square$

7 Séries principales et $I(1)$-invariants

Dans ce paragraphe, en faisant une petite hypothèse sur p, on va donner une seconde preuve de l'irréductibilité dans le théorème 1.1.(ii). Pour ce faire, on va établir la simplicité du module $\left(\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2\right)^{I(1)}$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-dimension $e = 2d_1d_2$ sur l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori. On rappelle que $\{\ \}$ est un isomorphisme $k_D^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(q^d-1)\mathbb{Z}$ que l'on a fixé et on garde les notations du paragraphe 4 (notamment ξ_1 et ξ_2).
Commençons par des lemmes calculatoires un peu techniques.

Lemme 7.1 *Soient $g = d_1 \wedge d_2$ et j un entier de $[0, g-1]$. Soit*

$$F_j = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \left\{ \begin{array}{c|c} (x,y) \mapsto \xi_1^{\{x^{q_D^{k_1}}\}} \xi_2^{\{y^{q_D^{k_2}}\}}, & 0 \le k_1 < d_1, 0 \le k_2 < d_2, \\ (x,y) \mapsto \xi_1^{\{y^{q_D^{k_1}}\}} \xi_2^{\{x^{q_D^{k_2+1}}\}} & k_1 - k_2 = j \mod g \end{array} \right\}$$

le sous-espace du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel des fonctions $(k_D^\times)^2 \to \overline{\mathbb{F}}_p$.

(a) Supposons ξ_1 et ξ_2 non Frobenius-conjugués[5]*. Alors F_j est de dimension e/g.*

(b) Supposons ξ_1 et ξ_2 Frobenius-conjugués. Alors il existe au plus un entier $j_0 \in [0, g-1]$ tel que F_{j_0} est de dimension strictement inférieure à e/g.

Preuve :
Les fonctions $(x,y) \mapsto \xi_1^{\{x^{q_D^{k_1}}\}} \xi_2^{\{y^{q_D^{k_2}}\}}$ et $(x,y) \mapsto \xi_1^{\{y^{q_D^{k_1}}\}} \xi_2^{\{x^{q_D^{k_2+1}}\}}$ sont chacunes des caractères de groupes $(k_D^\times)^2 \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Par le théorème d'indépendance linéaire des caractères d'Artin, il suffit de montrer que ces caractères sont deux à deux distincts.
On prouve uniquement le *(b)*, le *(a)* étant plus facile. On suppose donc ξ_1 et ξ_2 Frobenius-conjugués. Les cas « $\xi_1^{\{x^{q_D^{k_1}}\}} \xi_2^{\{y^{q_D^{k_2}}\}} = \xi_1^{\{x^{q_D^{k_3}}\}} \xi_2^{\{y^{q_D^{k_4}}\}}$ pour tous $x, y \in k_D^\times$ » et « $\xi_1^{\{y^{q_D^{k_1}}\}} \xi_2^{\{x^{q_D^{k_2+1}}\}} = \xi_1^{\{y^{q_D^{k_3}}\}} \xi_2^{\{x^{q_D^{k_4+1}}\}}$ pour tous $x, y \in k_D^\times$ » sont faciles et la preuve est laissée au lecteur. On suppose donc à présent :

$$\xi_1^{\{x^{q_D^{k_1}}\}} \xi_2^{\{y^{q_D^{k_2}}\}} = \xi_1^{\{y^{q_D^{k_3}}\}} \xi_2^{\{x^{q_D^{k_4+1}}\}} \text{ pour tous } x, y \in k_D^\times. \tag{31}$$

En spécialisant en $x = 1$ et $y = \mu$, puis en $x = \mu$ et $y = 1$, on obtient les identités

$$\xi_2^{q_D^{k_2}} = \xi_1^{q_D^{k_3}}, \quad \xi_1^{q_D^{k_1}} = \xi_2^{q_D^{k_4+1}}. \tag{32}$$

5. c'est-à-dire non dans la même orbite sous l'application $x \mapsto x^{q_D}$; on remarque que par le lemme 3.3, en particulier si $d_1 \neq d_2$, alors ξ_1 et ξ_2 sont non Frobenius-conjugués

On les combine et on obtient
$$\xi_1 = \xi_2^{q_D^{k_4-k_1+1}} = \xi_1^{q_D^{k_3-k_2+k_4-k_1+1}}.$$
Par le lemme 3.3, cela implique
$$k_3 - k_2 + k_4 - k_1 + 1 = 0 \mod g. \tag{33}$$
On rappelle aussi que si on travaille sur un espace F_j fixé on a :
$$k_1 - k_2 = j \mod g, \quad k_3 - k_4 = j \mod g. \tag{34}$$
En combinant (33) et (34), on a
$$2(k_2 - k_4) + 1 = 0 \mod g. \tag{35}$$
On remarque que cela nécessite que g soit impair ; supposons-le, puisque dans le cas contraire *(b)* est prouvé. Comme $k_4 - k_2$ appartient à $[1-g, g-1]$ (on rappelle que $d_1 = d_2 = g$ puisque ξ_1 et ξ_2 sont Frobenius-conjugués), (35) nous dit en fait :
$$2(k_4 - k_2) + 1 \in \{-g, 0, g\}.$$
Le cas $2(k_4 - k_2) + 1 = 0$ est écarté par parité. Reste que dans les deux cas restants, on a
$$k_4 - k_2 = \frac{g-1}{2} \mod g.$$
En se servant de cela, de (34) et de (32), on a
$$\xi_1^{q_D^j} = \xi_2^{q_D^{\frac{g+1}{2}}}. \tag{36}$$
Comme ξ_1 et ξ_2 sont Frobenius-conjugués et engendrent tous deux $\mathbb{F}_{q^g}$, il existe un unique $j_0 \in [0, g-1]$ vérifiant (36). Et pour $j \neq j_0$, le cas (31) est impossible et F_j est de dimension e/g comme convenu. $\square$

On remarque que la preuve implique en fait qu'un j_0 comme en *(ii)* existe si et seulement si g est impair. Le cas contraire, tous les F_j sont de dimension e/g. Cependant, on n'aura pas besoin d'utiliser cette remarque. Par contre, on va utiliser le fait que, sans aucune hypothèse sur ξ_1 et ξ_2, la preuve du résultat précédent nous donne immédiatement l'énoncé suivant.

Lemme 7.2 *Les sous-espaces*
$$\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{F}}_p}\left\{(x,y) \mapsto \xi_1^{\{x^{q_D^{k_1}}\}}\xi_2^{\{y^{q_D^{k_2}}\}} \;\middle|\; 0 \le k_1 < d_1, 0 \le k_2 < d_2\right\},$$
$$\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{F}}_p}\left\{(x,y) \mapsto \xi_1^{\{y^{q_D^{k_1}}\}}\xi_2^{\{x^{q_D^{k_2+1}}\}} \;\middle|\; 0 \le k_1 < d_1, 0 \le k_2 < d_2\right\}$$
du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel des fonctions $(k_D^\times)^2 \to \overline{\mathbb{F}}_p$ sont tous deux de dimension $e/2 = d_1 d_2$.

On donne un résultat qui constitue un premier pas vers la simplicité de $V^{I(1)}$ en tant que $\mathcal{H}(G, I(1))$-module (sous de bonnes conditions). On remarque que l'énoncé n'utilise pas l'action de $H_s(\lambda, \tau)$ et on va pouvoir l'utiliser par la suite pour des sous-espaces de $V^{I(1)}$ ne disposant pas d'une telle action, et avec H_δ au lieu de H_Δ.

Lemme 7.3 *Supposons que p ne divise pas $e = 2d_1d_2$. Soient W un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension e, de base*
$$\left(e^0_{0,0}, e^0_{0,1}, \ldots, e^0_{0,d_2-1}, e^0_{1,0}, \ldots, e^0_{d_1-1,d_2-1}, e^1_{0,0}, \ldots, e^1_{0,d_2-1}, \ldots, e^1_{d_1-1,d_2-1}\right)$$

et X un ensemble. Soient $(h^i_{a,b})$ pour $i = 0,1$, $0 \le a < d_1$, $0 \le b < d_2$ une famille de fonctions $X \to \overline{\mathbb{F}}_p$ et, pour tout $x \in X$, $H_\Delta(x)$ la matrice d'endomorphisme de W diagonale telle que l'on ait $H_\Delta(x)e^i_{a,b} = h^i_{a,b}e^i_{a,b}$ pour tous i, a, b. Pour tout entier $j \in [0, g-1]$, on note

$$W_j = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{F}}_p}\left\{e^i_{a,b} \;\middle|\; i = 0,1;\; a - b = j \mod g\right\},$$

sous-espace vectoriel de W. On suppose que la sous-famille $(h^i_{a,b})$ pour $i = 0,1$ et $a-b = j$ modulo g est libre, pour tout $j \in [0, g-1]$. Alors, pour tout j, W_j est stable et est irréductible[6] *sous l'action de $H_\omega(\lambda)$ et des $H_\Delta(x)$ pour tout $x \in X$.*

Remarque : Lorsque l'on a $p \nmid e$ et $d_1 \wedge d_2 = 1$, cela montre déjà la simplicité de $V^{I(1)}$.
Preuve :
Parce que les $(h^i_{a,b})$ pour $i = 0,1$ et $a - b = j$ modulo g forment une famille libre de fonctions, les seuls sous-espaces de W_j qui sont stables par les $H_\Delta(x)$ sont ceux engendrés par des parties de $\left\{e^i_{a,b} \;\middle|\; i = 0,1;\; a-b = j \mod g\right\}$. Soit W' un tel sous-espace non réduit à $\{0\}$: il contient un vecteur $x = e^i_{a,b}$.
Regardons maintenant l'action de $H_\omega(\lambda)$. Soit λ_0 un élément vérifiant $\lambda_0^{2d_2} = \lambda$ dans le corps algébriquement clos $\overline{\mathbb{F}}_p$. L'image de $e^0_{j,0}$ par les itérés successifs de $\lambda_0 H_\omega(\lambda)$ sont :

$$\begin{aligned} e^0_{j,0} &\mapsto \lambda_0^{1-2d_2}e^1_{j-1,d_2-1} \mapsto \lambda_0^{2-2d_2}e^0_{j-1,d_2-1} \mapsto \lambda_0^{3-2d_2}e^1_{j-2,d_2-2} \mapsto \dots \\ \dots &\mapsto \lambda_0^{-1}e^1_{j-d_2,0} \mapsto e^0_{j-d_2,0} \mapsto \lambda_0^{1-2d_2}e^1_{j-d_2-1,d_2-1} \mapsto \dots, \end{aligned} \tag{37}$$

où les indices a, b dans $f^i_{a,b}$ sont respectivement vus modulo d_1 et d_2. Parce que $(1,1)$ engendre un sous-groupe d'ordre e/g dans $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}$, les images dans (37) forment un cycle de longueur e/g et parcourent toutes les droites $\overline{\mathbb{F}}_p\, e^i_{a,b}$ pour $a - b = j$ modulo g. De ce fait, le sous-espace W' de W_j contenant $x = e^i_{a,b}$ ne peut être stable sous $H_\omega(\lambda)$ que s'il est tout W_j. Comme tout sous-espace de W_j non réduit à $\{0\}$ et stable par $H_\omega(\lambda)$ et les $H_\Delta(x)$ est W_j, cela prouve son irréductibilité. □

Lemme 7.4 *Supposons $d_1d_2 = 1$ et ρ_1 non isomorphe à ρ_2. Alors l'espace $\left(\mathrm{Ind}_B^G\, \rho_1 \otimes \rho_2\right)^{I(1)}$ est simple en tant que module à droite sur $\mathcal{H}(G, I(1))$.*

Preuve :
Parce que l'on a $d_1 = d_2 = 1$, ξ_1 et ξ_2 sont des éléments de $\mathbb{F}_q$, et ainsi ils sont fixés par $x \mapsto x^{q_D}$. On se place dans la base $(f^0_{0,0}, f^1_{0,0})$ dans laquelle le lemme 4.5 nous donne les matrices respectives des actions de $T^{(-1)}$, de Δ^x_y et de S suivantes :

$$H_\omega(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad H_\delta(x,y) = \begin{pmatrix} \xi_1^{\{\overline{x}\}}\xi_2^{\{\overline{y}\}} & 0 \\ 0 & \xi_1^{\{\overline{y}\}}\xi_2^{\{\overline{x}\}} \end{pmatrix}, \quad H_s(\lambda,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & \tau \end{pmatrix}.$$

On discute deux cas distincts.
Cas 1 : $\xi_1 \neq \xi_2$, c'est-à-dire $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times} \neq \rho_2|_{\mathcal{O}_D^\times}$.
En prenant $\overline{x} = \mu$ et $\overline{y} = 1$, on voit que $H_\delta(x,y)$ n'est pas une homothétie : les sous-espaces non triviaux et propres que $H_\delta(x,y)$ stabilise sont alors les droites $\overline{\mathbb{F}}_p f^0_{0,0}$ et $\overline{\mathbb{F}}_p f^1_{0,0}$. Or ces droites ne sont pas stabilisées par $H_\omega(\lambda)$. On a donc montré la simplicité voulue.
Cas 2 : $\xi_1 = \xi_2$, c'est-à-dire $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times} = \rho_2|_{\mathcal{O}_D^\times}$.
Parce que l'on a $\tau^2 = 1$, les droites stables par $H_s(\lambda,\tau)$ sont $\overline{\mathbb{F}}_p f^1_{0,0}$ et $\overline{\mathbb{F}}_p(\lambda f^0_{0,0} - \tau f^1_{0,0})$. Parce que ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, on a nécessairement $\lambda \neq 1$. De ce fait, ni l'une ni l'autre de ces droites n'est stable par $H_\omega(\lambda)$. Là encore on a la simplicité voulue. □

Théorème 7.5 *Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaite :*

6. c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-espace propre non nul stable par les endomorphismes en question

(a) ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes ;

(b) $\rho_1 = \rho_2$ est de dimension $d_1 = d_2 > 1$.

Supposons de plus $p \nmid 2d_1d_2$. Alors l'espace $\left(\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2\right)^{I(1)}$ est simple en tant que module à droite sur $\mathcal{H}(G, I(1))$.

Avant que de prouver ce résultat, mentionnons la conséquence qu'était notre objectif, devenue immédiate après consultation du lemme 4.3. Comme annoncé précédemment, on va avoir besoin de faire une hypothèse sur p. Lorsque ρ_1 et ρ_2 parcourent l'ensemble des représentations irréductibles de $D^\times$, $p \nmid 2d_1d_2$ devient la condition suivante.

Hypothèse 1 *Le premier p ne divise pas $2d$.*

Faisons tout de suite la remarque qu'elle provient de la méthode employée dans ce paragraphe et l'irréductibilité des séries principales est vraie sans cette hypothèse (voir théorème 6.2).

Corollaire 7.6 *Supposons l'hypothèse 1. Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$ satisfaisant (a) ou (b) du théorème 7.5. Alors $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ est une représentation irréductible de G.*

7.1 Preuve du théorème 7.5

Lorsque d_1 et d_2 sont égaux à 1, par hypothèse ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes. Le résultat est alors l'objet du lemme 7.4.

Lorsque d_1d_2 est strictement supérieur à 1 mais que d_1 et d_2 sont premiers entre eux, c'est l'objet du lemme 7.3 appliqué à $W = \left(\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2\right)^{I(1)}$ et

$$\{H_\Delta(x) \mid x \in X\} = \{H_\delta(x, y) \mid x, y \in \mathcal{O}_D^\times\},$$

ce qui est possible grâce au lemme 7.1.(i).

On peut donc supposer à présent que le pgcd de d_1 et d_2, que l'on notera g, est strictement supérieur à 1 ; et c'est ce qu'on fera par la suite. Notons $V = \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$. Pour tout entier j de $[0, g-1]$, on note [7]

$$W_j = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{F}}_p}\{f_{a,b}^i \mid i = 0, 1;\ a - b = j \mod g\}; \tag{38}$$

cela découpe une somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels $V^{I(1)} = \bigoplus_j W_j$. Soient W un sous-$\mathcal{H}(G, I(1))$-module non nul de $V^{I(1)}$ et w un élément non nul de W. On écrit

$$w = w_0 + w_1 + \cdots + w_{g-1} \in \bigoplus\nolimits_j W_j; \tag{39}$$

et on note

$$\Gamma_w = \left|\{j \in [0, g-1] \mid w_j \neq 0\}\right|.$$

C'est un entier strictement positif car w est non nul.

On va montrer par récurrence sur $k \geq 1$ que tout élément non nul w de W avec $\Gamma_w = k$ engendre $V^{I(1)}$ en tant que $\mathcal{H}(G, I(1))$-module. On veut distinguer deux cas différents pour la preuve de cette récurrence. On remarque que W_j est stable par $T^{(-1)}$ et par les Δ_y^x pour tous $x, y \in \mathcal{O}_D^\times$.

<u>Cas 1</u> : $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times} \not\sim \rho_2|_{\mathcal{O}_D^\times}$, c'est-à-dire ξ_1 et ξ_2 non Frobenius-conjugués.

Commençons la récurrence avec l'étape $k = 1$. Dans ce cas-là, il existe un unique $i_0 \in [0, g-1]$ avec $w_{i_0} \neq 0$. Parce que ξ_1 et ξ_2 sont non Frobenius-conjugués, le lemme 7.1.(i) nous dit que les coefficients diagonaux de $H_\delta(x, y)|_{W_{i_0}}$ forment une famille libre. On peut alors appliquer le lemme 7.3 pour affirmer que W_{i_0} est irréductible et il est donc inclus dans W. En particulier W contient $f_{i_0,0}^0$; et son image par S est un élément non nul de W_{i_0+1}. On se sert ensuite à nouveau des lemmes 7.1.(i) et 7.3 pour affirmer

7. on verra parfois aussi l'indice j de W_j comme la classe qu'il représente dans $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$

que W_{i_0+1} est inclus dans W ; puis l'image de $f^0_{i_0+1,0}$ par S est non nulle et appartient à W_{i_0+2}, etc. Par une récurrence immédiate, on voit que W contient $\bigoplus_j W_j = V^{I(1)}$ et on a terminé l'étape d'initiation.
Montrons maintenant que le rang $k \geq 1$ implique le rang $k+1$ dans la récurrence. On remarque que les cas $k > g$ ou $k+1 > g$ n'ont pas de sens vu que l'on a $\Gamma_w \leq g$ pour tout $w \in W$; k est ainsi inférieur à $g-1$. Soit w un élément de W avec $\Gamma_w = k+1$. Notons

$$W^{(i)} = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{F}}_p}\{f^i_{a,b} \mid 0 \leq a < d_1,\ 0 \leq b < d_2\}$$

pour $i = 0, 1$. Supposons dans un premier temps w inclus dans $W^{(0)}$ ou dans $W^{(1)}$, disons $W^{(0)}$, l'autre cas de figure étant identique. Comme $\Delta^{[x]}_{[y]}$ stabilise $W^{(0)}$ et $\Delta^{[x]}_{[y]}|_{W^{(0)}}$ est diagonalisable de valeurs propres deux à deux distinctes par le lemme 7.2, le lemme des noyaux nous affirme la décomposition

$$W^{(0)} = \bigoplus_j \ker\Big(\prod_{a-b=j} \Delta^{[x]}_{[y]}|_{W^{(0)}} - \xi_1^{\{x^{q_D^a}\}}\xi_2^{\{y^{q_D^b}\}}\mathrm{id}_{W^{(0)}}\Big).$$

En particulier, si i_1 est tel que l'on ait $w_{i_1} \neq 0$ (voir (39)), alors les fonctions

$$(x,y) \mapsto w'(x,y) = w \cdot \Big(\prod_{a-b=j} \Delta^{[x]}_{[y]}|_{W^{(0)}} - \xi_1^{\{x^{q_D^a}\}}\xi_2^{\{y^{q_D^b}\}}\mathrm{id}_{W^{(0)}}\Big)$$

sont non identiquement nulles (car on a $\Gamma_w = k+1 \geq 2$) et vérifient $\Gamma_{w'(x,y)} < \Gamma_w$ pour tout $x, y \in k_D^\times$. Il reste à prendre $(x_0, y_0) \in (k_D^\times)^2$ avec $w'(x_0,y_0) \neq 0$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à $w'(x_0,y_0)$.
Supposons maintenant w inclus ni dans $W^{(0)}$, ni dans $W^{(1)}$. Alors l'image w' de w par S est non nulle et vérifie $\Gamma_{w'} < \Gamma_w$. On applique l'hypothèse de récurrence à w' pour conclure.

Cas 2 : $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times} \simeq \rho_2|_{\mathcal{O}_D^\times}$, c'est-à-dire ξ_1 et ξ_2 Frobenius-conjugués.
Reprenons l'étape d'initiation $k=1$ dans ce cadre-là. Par le lemme 7.1.(ii), il existe au plus un $j_0 \in [0, g-1]$ tel que l'on ne puisse pas appliquer le lemme 7.3 à W_{j_0}. Supposons que ce j_0 existe bien (le cas contraire, on peut procéder exactement comme au Cas 1) et voyons comment contourner la difficulté. Si i_0 est distinct de j_0, alors par le raisonnement du Cas 1, on a déjà

$$W_{i_0} \oplus W_{i_0+1} \oplus \cdots \oplus W_{j_0-1} \subseteq W.$$

Or on remarque que la restriction de S à $W^{(0)} \cap W_{j_0-1}$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels entre $W^{(0)} \cap W_{j_0-1}$ et $W^{(1)} \cap W_{j_0}$. De cette manière, $W^{(1)} \cap W_{j_0}$ est inclus dans W, et il reste à utiliser l'action de $T^{(-1)}$ pour conclure $W_{j_0} \subseteq W$. On poursuit ensuite pour montrer W_{j_0+1} comme au Cas 1, etc.
Maintenant, si i_0 est égal à j_0, on regarde d'abord le noyau de S : c'est le sous-espace vectoriel de $V^{I(1)}$ engendré par

$$\{f^1_{a,b} \mid a+k \neq b+1\} \cup \{\tau f^1_{a,b} - f^0_{a,b+1} \mid a+k = b+1 \neq d_2\} \cup \{\tau f^1_{d_1-k,d_2-1} - \lambda f^0_{d_1-k,0}\}. \tag{40}$$

Si w est dans le noyau de S, comme on a $\Gamma_w = 1$, w est dans l'espace engendré par $\{f^1_{a,b} \mid a+k \neq b+1\}$. Mais alors $T^{(-1)}$ envoie w sur un élément w' non nul de $W^{(0)} \cap W_{j_0}$, et S envoie w' sur un élément non nul w'' de $W^{(1)} \cap W_{j_0+1}$. Reste à appliquer le cas $i_0 \neq j_0$ à w''. Si w n'est pas dans le noyau de S, son image w' par S est dans $W^{(1)} \cap (W_{j_0} \oplus W_{j_0+1})$. Comme à la fin du Cas 1, on forme alors

$$w''(x,y) = w' \cdot \Big(\prod_{a-b=j_0} \Delta^{[x]}_{[y]}|_{W^{(1)}} - \xi_1^{\{y^{q_D^a}\}}\xi_2^{\{x^{q_D^{b+1}}\}}\mathrm{id}_{W^{(0)}}\Big)$$

pour obtenir un $w''(x_1,y_1)$ non nul dans $W^{(1)} \cap W_{j_0+1}$ et conclure comme précédemment.
Montrons maintenant comment le rang $k \geq 1$ implique le rang $k+1$ de la récurrence. Prenons $w \in W$ avec $\Gamma_w = k+1$. Si wS est non nul, on le note $w' \in W^{(1)}$ et on a $\Gamma_{w'} \leq k+2$. On utilise alors une

fois de plus le lemme 7.2 et une de ces images w'' par un polynôme en $\Delta^{[x]}_{[y]}|_{W^{(1)}}$ est non nulle et vérifie $\Gamma_{w''} \leq k$: on applique l'hypothèse de récurrence à w''.
Si wS est nul, observons la base (40) du noyau de S : ou bien w est engendré par $\{f^1_{a,b} \mid a+k \neq b+1\}$ et on prend, comme précédemment, une de ses images par un polynôme convenable en $\Delta^{[x]}_{[y]}|_{W^{(1)}}$. Ou bien w possède une composante sur un $\tau f^1_{a,b} - f^0_{a,b+1}$ ou $\tau f^1_{d_1-k,d_2-1} - \lambda f^0_{d_1-k,0}$. Remarquons que ces vecteurs ne sont pas vecteurs propres pour les $\Delta^{[x]}_{[y]}$: si cela avait été le cas, on aurait

$$\xi_1^{\{y^{q_D^a}\}}\xi_2^{\{x^{q_D^{b+1}}\}} = \xi_1^{\{x^{q_D^a}\}}\xi_2^{\{y^{q_D^b}\}}$$

pour tous $x, y \in k_D^\times$. Or cela impliquerait $\xi_1^{q_D^a} = \xi_2^{q_D^b}$, $\xi_2^{q_D^{b+1}} = \xi_1^{q_D^a}$, et donc $\xi_1^{q_D} = \xi_1$. Par le lemme 3.3 et l'hypothèse $g > 1$, c'est absurde. De ce fait, il existe $x_2, y_2 \in k_D^\times$ tels que $w\Delta^{[x_2]}_{[y_2]} = w'$ ne soit pas dans le noyau de S. Son image w'' par S est alors non nulle, dans $W^{(1)}$, et on peut appliquer le procédé précédent pour faire diminuer $\Gamma_{w''}$. La récurrence est terminée. □

8 Séries principales et induction compacte

On tâche dans ce paragraphe d'établir une nouvelle preuve du théorème 1.1.(ii) en utilisant une méthode à la Barthel-Livné-Herzig. Parce que ceci est précisément l'objet d'un autre travail de l'auteur (chapitre 3 de [Ly13]) pour $\mathrm{GL}(m, D)$, on sera plus concis sur la présentation. On va rappeler la méthode, et on va surtout se concentrer sur l'argument de « changement de poids », pour lequel, dans la plupart des cas (voir l'hypothèse 2 ci-dessous) on peut se passer du gros du travail et effectuer un argument ad hoc.

Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$. On cherche à démontrer que $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ est irréductible sous les conditions du théorème 1.1.(ii).
Avant de commencer l'argument à proprement parler, on s'attache d'abord à un lemme facile mais utile au cours de la démonstration. On remarque que ce lemme est un corollaire facile des lemme 6.1 et théorème 6.2, mais on peut s'en passer par un raisonnement explicite que l'on laissera au lecteur.

Lemme 8.1 *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$ telles que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*
(a) ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes ;
(b) $\rho_1 = \rho_2$ est de dimension $d_1 = d_2 > 1$.
La représentation $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ ne possède pas de sous-G-représentation de dimension 1.

Soit π une sous-G-représentation non nulle irréductible de $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$; en particulier, π est admissible par la proposition 4.2. On suppose que ρ_1 et ρ_2 vérifient l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2 *Si $\rho_1|_{\mathcal{O}_D^\times}$ et $\rho_2|_{\mathcal{O}_D^\times}$ sont isomorphes et ne sont pas des caractères, alors pour tout caractère $\chi_1 \otimes \chi_2 \subseteq (\rho_1 \otimes \rho_2)|_{B \cap K}$ avec $\chi_1 \neq \chi_2$, $\chi_2\chi_1^{-1}$ correspond à $x \mapsto x^{\vec{s}}$ (voir (3)) avec $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_{fd-1})$ tels que l'un au moins des s_i n'appartient pas à $\{0, 1, p-2, p-1\}$.*

Remarque : Le raisonnement général est valable sans elle mais elle est utile dans notre preuve du théorème 8.3. On peut prouver le théorème 8.3 sans cette hypothèse (voir [Ly13]) et on recouvre complètement alors une autre preuve du théorème 1.1.(ii) ; cependant l'argument gagne beaucoup en complexité.
Remarque : On voit que cela exclut d'office les premiers $p = 2, 3$.

Parce que $K(1)$ est un pro-p-groupe ouvert, $\pi^{K(1)}$ est non nul et de dimension finie. Comme $K(1)$ est normal dans K, $\pi^{K(1)}$ est une représentation de dimension finie de K, qui admet donc une sous-représentation irréductible, disons V.
On a l'alternative suivante : ou bien π est de dimension finie et par le lemme 6.1 et le fait que $\overline{\mathbb{F}}_p$ est

algébriquement clos, π est un caractère de G, ce qui est exclu par le lemme 8.1. Ou bien, par le théorème 8.3 ci-dessous, on peut supposer que V n'est pas un caractère (c'est-à-dire qu'elle est régulière au sens du paragraphe 2.5) ; c'est donc ce que l'on fera par la suite.
Comme l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K,V)$ est commutative (par le paragraphe 2.10 de [HV11]) et que

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_K^G V, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$$

est non nul de dimension finie (par réciprocité de Frobenius et admissibilité de π), il existe un vecteur propre Φ dans $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_K^G V, \pi)$ pour l'action de $\mathcal{H}(G,K,V)$. On note χ le caractère propre correspondant : c'est un caractère de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres $\mathcal{H}(G,K,V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$. Et Φ se factorise donc par le morphisme de G-représentations

$$\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \to \pi \tag{41}$$

que l'on notera encore Φ. Parce que π est irréductible, Φ est surjective. Observons que Φ provient par réciprocité de Frobenius d'un

$$f \in \mathrm{Hom}_K(V, \pi) \subseteq \mathrm{Hom}_K\big(V, \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2\big) \simeq \mathrm{Hom}_{A\cap K}\big(V_{U\cap K}, \rho_1 \otimes \rho_2\big),$$

et on notera f_1 son image dans $\mathrm{Hom}_{A\cap K}\big(V_{U\cap K}, \rho_1\otimes\rho_2\big)$. Aussi, parce que V est une sous-K-représentation d'une induite parabolique (voir lemme 9.1 ultérieur pour plus de détails), χ se factorise à travers la transformée de Satake

$$'\mathcal{S}_G : \mathcal{H}(G,K,V) \hookrightarrow \mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big);$$

on notera encore χ le caractère de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres résultant $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big)$.
Parce que V est régulière, par [HV12], Theorem 1.2 et Corollary 1.3, on a l'isomorphisme de G-représentations

$$\iota_V : \mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G\big(\mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K} \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p\big) \tag{42}$$

caractérisé par

$$\iota_V\big([1,v]\otimes 1\big)(1) = [1, p_U(v)] \otimes 1$$

pour tout $v \in V$ d'image $p_U(v)$ dans $V_{U\cap K}$. De plus, f_1 induit l'isomorphisme de A-représentations

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K} \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p & \xrightarrow{\sim} & \rho_1 \otimes \rho_2 \\ [1,v]\otimes 1 & \mapsto & f_1(v) \end{array}$$

comme on peut le voir à partir de la proposition 3.2 (ou bien on peut se reporter au lemme 9.1 et à la proposition 9.2.(i) ultérieurs) ; on le notera encore f_1. En appliquant le foncteur exact Ind_B^G, on obtient l'isomorphisme

$$\mathrm{Ind}\, f_1 : \mathrm{Ind}_B^G\big(\mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K} \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$$

de G-représentations. Comme

$$(\mathrm{Ind}\, f_1) \circ \iota_V : \mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$$

est déterminée par les valeurs

$$\big((\mathrm{Ind}\, f_1) \circ \iota_V\big)([1,v]\otimes 1)(1) = f_1 \circ p_U(v) = f(v)(1)$$

pour tout $v \in V$, on a $(\mathrm{Ind}\, f_1) \circ \iota_V = \Phi$. Il en résulte $\pi = \mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ et $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ est irréductible comme voulue.

On vient alors de démontrer l'énoncé suivant.

Corollaire 8.2 *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$ telles que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*
(a) ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes ;

(b) $\rho_1 = \rho_2$ est de dimension $d_1 = d_2 > 1$.
Supposons de plus l'hypothèse 2. Alors $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ est une représentation irréductible de G.

Enonçons maintenant l'énoncé de changement de poids qui nous a été utile.

Théorème 8.3 *Soit π une représentation irréductible non nulle de dimension infinie de G qui s'injecte dans $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ avec ρ_1 et ρ_2 satisfaisant l'hypothèse 2. Alors π contient une K-représentation irréductible régulière (c'est-à-dire qui n'est pas un caractère).*

Remarque : Par le lemme 6.1, parce que $\overline{\mathbb{F}}_p$ est algébriquement clos, il est équivalent de demander que π ne soit pas un caractère de G.
Remarque : Au cours de la preuve, on verra que si V est une K-représentation irréductible non régulière de $\pi|_K$, alors on peut choisir V' régulière dans $\pi|_K$ telle que $(V')^{U\cap K}$ et $\varphi_2.V^{U\cap K}$ sont des $(A\cap K)$-représentations isomorphes, et sa classe d'isomorphisme est en fait uniquement déterminée.

8.1 Preuve du théorème 8.3

Soit V une sous-K-représentation irréductible de π. Si V est régulière, il n'y a rien à faire. Supposons donc V non régulière, c'est-à-dire égale à un caractère $\chi\circ\overline{\det}$ et portée sur une droite que l'on notera $\overline{\mathbb{F}}_p v$. Si χ ne se factorise pas par la norme galoisienne N_{k_D/k_F}, alors $\overline{\mathbb{F}}_p\varphi_2 v$ est une représentation de $K\cap\varphi_2 K\varphi_2^{-1} = I$ égale à

$$\chi\otimes\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)\neq\chi\otimes\chi.$$

On a par suite une flèche non nulle

$$\mathrm{Ind}_I^K \chi\otimes\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)\to\pi\subseteq\mathrm{Ind}_B^G \rho_1\otimes\rho_2 = \mathrm{Ind}_{B\cap K}^K \rho_1\otimes\rho_2$$

de K-représentations. Par réciprocité de Frobenius, on a une flèche non nulle de $(B\cap K)$-représentations

$$\mathrm{Ind}_{\overline{B}}^{\overline{K}} \chi\otimes\chi(\varpi^{-1}[\cdot]\varpi)\to\rho_1\otimes\rho_2. \tag{43}$$

Le morphisme de (43) se factorise en fait par le morphisme non nul de $(A\cap K)$-représentations

$$\chi\otimes\chi(\varpi^{-1}[\cdot]\varpi)\oplus\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi(\varpi^{-1}[\cdot]\varpi)\otimes\chi\right)_U\to\rho_1\otimes\rho_2. \tag{44}$$

En notant $\chi^\omega = \chi(\varpi^{-1}[\cdot]\varpi)\otimes\chi$, on cherche à déterminer $\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)_U$. Une base de $\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)_U$ est donnée par les $[u,v]$ pour $u\in\overline{U}$ et v un élément non nul fixé de la droite sous-jacente à χ^ω. Les $u.f-f$ pour $u\in\overline{U}$ et $f\in\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega$ sont inclus dans la sous-$\overline{B}$-représentation

$$\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)_{(U)} = \left\{\sum\nolimits_{u\in\overline{U}}\lambda_u[u,v]\;\middle|\;\lambda_u\in\overline{\mathbb{F}}_p,\ \sum\lambda_u = 0\right\};$$

et ils l'engendrent bien comme on le voit en prenant $f=[1,v]$. Mais alors l'espace de coinvariants

$$\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)_U = \left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)/\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)_{(U)}$$

est de dimension 1, et il s'agit de déterminer l'action de $A\cap K$ dessus. Et $a\in A\cap K$ agit par $\chi^\omega(\overline{a})$ sur l'image $\overline{[1,v]}$ de $[1,v]$ dans $\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)_U$; d'où $\left(\mathrm{Ind}_{\overline{A}}^{\overline{B}}\chi^\omega\right)_U = \chi^\omega$ en tant que $(A\cap K)$-représentations. Et (44) devient

$$\chi\otimes\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)\oplus\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)\otimes\chi\to\rho_1\otimes\rho_2.$$

Ainsi $\chi\otimes\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)$ ou $\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)\otimes\chi$ est un sous-caractère de $(\rho_1\otimes\rho_2)|_{B\cap K}$, disons $\chi\otimes\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)$. Par l'hypothèse 2, il s'écrit $x\mapsto x^{\vec{s}}$ avec $\vec{s}=(s_0,s_1,\ldots,s_{fd-1})$, l'un des s_i n'appartenant pas à $\{0,1,p-2,p-1\}$. La Proposition 1.1 de [Dia07] nous assure que dans ce cas-là, aucun des facteurs de Jordan-Hölder de $\mathrm{Ind}_I^K \chi\otimes\chi(\varpi^{-1}\cdot\varpi)$ n'est un caractère. La droite $\overline{\mathbb{F}}_p\varphi_2 v$ engendre donc une K-représentation dans π, qui contient une sous-K-représentation irréductible régulière : la preuve est terminée.

Si χ se factorise par N_{k_D/k_F}, par la preuve du lemme 3.4, il existe un caractère χ_0 de $F^\times$ tel que $\chi \circ \overline{\det}$ soit la restriction à K de $\chi_0 \circ \det_G$. En utilisant le lemme 4.1 pour tordre π par $\chi_0^{-1} \circ \det_G$, on peut supposer que χ est le caractère trivial de $k_D^\times$. C'est donc ce que l'on fera par la suite.
La droite $\overline{\mathbb{F}}_p v$ porte ainsi la représentation triviale de K. On regarde la droite $\overline{\mathbb{F}}_p \varphi_2 v$: elle est stable par $K \cap \varphi_2 K \varphi_2^{-1} = I$, et on note $V_{1,0}$ la K-représentation qu'elle engendre. Parce que l'on a l'isomorphisme d'ensembles finis

$$I \backslash K \xrightarrow{\sim} \overline{B} \backslash \overline{K} = \big((B \cap K)/(B \cap K(1))\big) \backslash \overline{K},$$

et que I est un sous-groupe compact ouvert de K, la réciprocité de Frobenius nous donne un morphisme non nul de représentations de K

$$\mathrm{Ind}_I^K \mathbb{1} = \mathrm{Ind}_{\overline{B}}^{\overline{K}} \mathbb{1} \to V_{1,0}. \tag{45}$$

Par [Pas04], Lemma 3.1.7, on peut identifier $\mathrm{Ind}_{\overline{B}}^{\overline{K}} \mathbb{1}$: c'est la somme directe de la représentation triviale $\mathbb{1}$ de $\overline{K}$ et de la représentation de Steinberg finie $\overline{\mathrm{St}}$. Par [CE04], Definition 6.13, Theorem 6.10 et Theorem 6.12, $\overline{\mathrm{St}}$ est irréductible et de dimension q^d : c'est en fait la représentation que l'on a notée $\mathrm{Sym}^{\vec{p-1}}\, \overline{\mathbb{F}}_p^2$, et qui est régulière. Le morphisme non nul (45) nous offre alors l'alternative suivante : ou bien $V_{1,0}$ contient $\overline{\mathrm{St}}$ et la preuve de la proposition est terminée, ou bien $V_{1,0}$ est encore la représentation triviale de K.
Dans ce second cas de figure, on va s'intéresser à $V_{2,0}$, la K-représentation engendrée par la I-représentation $\overline{\mathbb{F}}_p \varphi_2^2 v$. De nouveau, par l'argument précédent, ou bien $V_{2,0}$ contient $\overline{\mathrm{St}}$, ou bien $V_{2,0}$ est $\mathbb{1}$. Dans le cas défavorable $V_{2,0} = \mathbb{1}$, on s'intéresse à $V_{3,0}$, etc.
S'il existe $i \geq 0$ (avec la convention $V_{0,0} = V$) tel que $V_{i,0}$ contienne $\overline{\mathrm{St}}$, la preuve est terminée. Supposons donc le cas contraire, c'est-à-dire que la K-représentation $V_{i,0}$ engendrée par $\overline{\mathbb{F}}_p \varphi_2^i v$ est triviale pour tout $i \geq 0$. Mais alors, pour tout $j \geq 0$, la droite $\overline{\mathbb{F}}_p \varpi^j \varphi_2^i v$ est stable par K et est triviale : on la note $V_{i,j}$. On forme la sous-représentation de $\pi|_K$

$$V_\infty = \sum_{i=0}^{2d-1} \sum_{j=0}^{d-1} V_{i,j} = \sum_{i=0}^{2d-1} \sum_{j=0}^{d-1} \overline{\mathbb{F}}_p \varphi_2^i \varpi^j v;$$

et on va montrer que V_∞ est une représentation de G. Grâce à la décomposition de Cartan

$$G = \coprod_{i \geq 0,\, j \in \mathbb{Z}} K \varphi_2^i \varpi^j K,$$

il s'agit de voir que V_∞ est stable par $\varpi^{\pm d}$ et φ_2^{2d}. Comme $\varpi^{d\mathbb{Z}}$ est un sous-groupe du centre de G, son action sur la représentation admissible irréductible π est donnée par un caractère (par lemme de Schur) : en particulier, elle stabilise V_∞. Et parce que l'action de $s \in K$ est triviale sur chaque $V_{i,j}$ on a, pour tous $i, j \geq 0$:

$$\varphi_2^{2d} \varphi_2^i \varpi^j v = (\varphi_2 s \varphi_2 s \cdots \varphi_2 s) \varphi_2^i \varpi^j v = \varpi^d \varphi_2^i \varpi^j v.$$

Et comme l'action de ϖ^d est scalaire, φ_2^{2d} stabilise bien V_∞ et V_∞ est une G-représentation comme affirmé. Parce que π est irréductible, V_∞ est π, mais cela contredit le fait que π est de dimension infinie. C'est donc que notre supposition était erronée : l'un des $V_{i,0}$ contient nécessairement $\overline{\mathrm{St}}$ et la preuve est terminée. □

9 Classification des représentations irréductibles admissibles

Soit π une représentation irréductible admissible de G. Par la discussion après le lemme 8.1, il existe une K-représentation irréductible V et un caractère $\chi : \mathcal{H}(G, K, V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres tels que l'on ait une surjection

$$\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \twoheadrightarrow \pi \tag{46}$$

de G-représentations. Si pour tous V et χ satisfaisant (46), χ ne se factorise pas par la transformée de Satake

$$'\mathcal{S}_G : \mathcal{H}(G, K, V) \to \mathcal{H}\big(A, A \cap K, V_{U\cap K}\big),$$

alors π est dite *supersingulière.*
On va tâcher de montrer que toute représentation π qui n'est pas supersingulière a déjà été étudiée auparavant, c'est-à-dire qu'elle est un caractère, une représentation de Steinberg, ou bien une série principale. Dans ce paragraphe encore, on insiste sur le fait que l'on se passe complètement du travail de changement de poids du théorème 8.3 (et donc de l'hypothèse 2).

Commençons pour cela par identifier les paramètres (V, χ) des séries principales comme en (42). Pour η un caractère de $A \cap K$, on définit le sous-groupe suivant de A_Λ :

$$\widetilde{Z}_A(\eta) = \{a \in A_\Lambda \mid \forall x \in A \cap K,\, \eta(a^{-1}xa) = \eta(x)\}.$$

C'est un invariant important du caractère η, et cela transparaît sur V aussi : pour toute représentation irréductible de K, on l'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres (voir le paragraphe 7.1 de [HV11]) :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}\big(A, A \cap K, V_{U\cap K}\big) & \overset{\sim}{\leftarrow} & \overline{\mathbb{F}}_p\big[\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)\big] \\ \tau_{a_2}^{a_1} & \leftarrow\!\shortmid & \begin{pmatrix} \varpi^{a_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{a_2} \end{pmatrix} \in \widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big) \end{array}, \tag{47}$$

où $\tau_{a_2}^{a_1}$ désigne l'opérateur de support $\begin{pmatrix} \varpi^{a_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{a_2} \end{pmatrix}(A \cap K)$ et valant id en $\begin{pmatrix} \varpi^{a_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{a_2} \end{pmatrix}$.

Lemme 9.1 *Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations irréductibles de $D^\times$. Soient V une K-représentation irréductible et $\chi : \mathcal{H}(G, K, V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres induisant un morphisme non nul de G-représentations*

$$\operatorname{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \to \operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2. \tag{48}$$

Alors $V_{U\cap K}$ est un caractère de $A \cap K$ qui est une sous-représentation de $\rho_1 \otimes \rho_2|_{A\cap K}$, et χ se factorise à travers $'\mathcal{S}_G$ en un caractère de $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big)$ que l'on notera encore χ. De plus, pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\begin{pmatrix} \varpi^{a_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{a_2} \end{pmatrix}$ soit un élément de $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)$, on a

$$\chi(\tau_{a_2}^{a_1}) = \rho_1(\varpi^{a_1})\rho_2(\varpi^{a_2}) \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times. \tag{49}$$

Preuve :
L'existence d'un morphisme non nul (48) implique en particulier que l'espace $\operatorname{Hom}_G\big(\operatorname{ind}_K^G V, \operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2\big)$ est non réduit à 0. En appliquant deux fois la réciprocité de Frobenius et en mettant à profit l'isomorphisme topologique $B \cap K\backslash K \xrightarrow{\sim} B\backslash G$, on a :

$$\operatorname{Hom}_G\big(\operatorname{ind}_K^G V, \operatorname{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2\big) = \operatorname{Hom}_K\big(V, \operatorname{Ind}_{B\cap K}^K \rho_1 \otimes \rho_2\big)$$

$$= \operatorname{Hom}_{B\cap K}(V, \rho_1 \otimes \rho_2) = \operatorname{Hom}_{A\cap K}\big(V_{U\cap K}, \rho_1 \otimes \rho_2\big).$$

De ce fait, $V_{U\cap K}$, qui est un caractère de $A \cap K$ par le lemme 2.2.(i), s'injecte dans $\rho_1 \otimes \rho_2|_{A\cap K}$.
Par la Proposition 4.5 de [HV12], $'\mathcal{S}_G : \mathcal{H}(G, K, V) \to \mathcal{H}\big(A, A \cap K, V_{U\cap K}\big)$ est une flèche de localisation en τ_0^d et pour voir que χ se factorise par $'\mathcal{S}_G$, il suffit de voir que

$$'\mathcal{S}_G\big(\mathcal{H}(G, K, V)\big) \xrightarrow{('\mathcal{S}_G)^{-1}} \mathcal{H}(G, K, V) \xrightarrow{\chi} \overline{\mathbb{F}}_p$$

ne s'annule pas en τ_0^d. Prouvons donc (49) pour τ_0^d d'abord. Parce que la flèche de B-représentations est non nulle, on a

$$\chi \circ ('\mathcal{S}_G)^{(1}(\tau_0^d) = \rho_1(\varpi^d)\rho_2(1) = \rho_1(\varpi^d) \neq 0$$

et χ se factorise par $'\mathcal{S}_G$. Alors il en résulte un morphisme non nul $\mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K}\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \to \rho_1\otimes\rho_2$. Lorsque $\begin{pmatrix} \varpi^{a_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{a_2} \end{pmatrix}$ est un élément de $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)$, l'action de $\tau_{a_2}^{a_1}$ sur $\mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K}\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ est compatible avec celle de $\begin{pmatrix} \varpi^{a_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{a_2} \end{pmatrix}$ sur $\rho_1\otimes\rho_2$. Et cette dernière est scalaire, égale à $\rho_1(\varpi^{a_1})\rho_2(\varpi^{a_2})$ par la proposition 3.1. $\square$

Proposition 9.2 *Soient V une K-représentation irréductible et χ un caractère de $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big)$. On note encore χ le caractère de $\mathcal{H}(G,K,V)$ que l'on obtient en le précomposant par $'\mathcal{S}_G$.*

(i) La A-représentation $\mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K}\otimes_\chi\overline{\mathbb{F}}_p$ est irréductible, de dimension finie et on la notera $\rho_1\otimes\rho_2$.

(ii) (a) Supposons V régulière. Alors on a un isomorphisme

$$\mathrm{ind}_K^G V\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G \rho_1\otimes\rho_2$$

de G-représentations.

(b) Supposons $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)\neq A_\Lambda$ ou bien ($\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)= A_\Lambda$ et $\chi(\tau_0^1)\neq\chi(\tau_1^0)$). Alors $\mathrm{ind}_K^G V\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1\otimes\rho_2$.

Preuve :
La $(A\cap K)$-représentation $V_{U\cap K}$ se décompose en $\sigma_1\otimes\sigma_2$ où σ_1,σ_2 sont des caractères de $\mathcal{O}_D^\times$. Mais alors on a l'isomorphisme de groupes suivants, dans les notations du paragraphe 3 :

$$\begin{pmatrix} N_{\sigma_1}/k_D^\times & 0 \\ 0 & N_{\sigma_2}/k_D^\times \end{pmatrix} \simeq \widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big) = \begin{pmatrix} \varpi^{d_1\mathbb{Z}} & 0 \\ 0 & \varpi^{d_2\mathbb{Z}} \end{pmatrix}$$

pour des entiers $d_1, d_2\geq 1$ uniquement déterminés. Donc, par la proposition 3.2, $\mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K}\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ est isomorphe, en tant que A-représentation, à $\rho\big(\sigma_1,\chi(\tau_0^{d_1})\big)\otimes\rho\big(\sigma_2,\chi(\tau_{d_2}^0)\big)$, qui est irréductible par la proposition 3.1. Le *(i)* est prouvé.
Supposons V régulière. Alors, par [HV12], Theorem 1.2 et Corollary 1.3, on a l'isomorphisme de G-représentations

$$\mathrm{ind}_K^G V\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G\big(\mathrm{ind}_{A\cap K}^A V_{U\cap K}\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p\big) = \mathrm{Ind}_B^G \rho_1\otimes\rho_2.$$

Prouvons maintenant *(ii).(b)*. La condition $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)\neq A_\Lambda$ est équivalente à ce que ρ_1 ou ρ_2 est de dimension strictement supérieure à 1 ; et la condition ($\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)= A_\Lambda$ et $\chi(\tau_0^1)\neq\chi(\tau_1^0)$) implique que ρ_1 et ρ_2 sont deux caractères de $D^\times$ non isomorphes. Dans les deux cas, on peut appliquer le théorème 6.2 et $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1\otimes\rho_2$ est irréductible. Si V est régulière, le résultat est trivial par *(ii).(a)*. Supposons donc V non régulière.
Par la coordination des lemmes 9.1 et 2.2, on peut prendre V' une K-représentation irréductible régulière incluse dans $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1\otimes\rho_2$. En fait, on peut même supposer que V' est l'unique K-représentation irréductible régulière telle que les $(A\cap K)$-représentations $V'_{U\cap K}$ et $\varphi_1.V_{U\cap K}$ sont isomorphes ; c'est donc ce que l'on fera par la suite. En particulier, on a $\widetilde{Z}_A\big(V'_{U\cap K}\big)=\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)$ et on peut identifier $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V'_{U\cap K}\big)$ et $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big)$ à travers (47) ; on notera encore χ le caractère de $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V'_{U\cap K}\big)$ résultant de cette identification. Par la proposition 9.3 ci-dessous, on a alors l'isomorphisme de G-représentations

$$\mathrm{ind}_K^G V\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_K^G V'\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$$

et le résultat suit de *(ii).(a)*. $\square$

Proposition 9.3 *Soient V un caractère de K et χ un caractère de $\mathcal{H}(A, A\cap K, V)$ vérifiant $\chi(\tau_0^1)\neq\chi(\tau_1^0)$ si on a $\widetilde{Z}_A(V)=A_\Lambda$. Soit V' l'unique K-représentation régulière telle que les $(A\cap K)$-représentations $V'_{U\cap K}$ et $\varphi_1.V_{U\cap K}$ sont isomorphes. On a un isomorphisme de G-représentations*

$$\mathrm{ind}_K^G V\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_K^G V'\otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Remarque : Cet énoncé ne nécessite pas l'hypothèse 2 car on a le théorème 6.2 à notre disposition (à la place du corollaire 8.2). Il en va de même des résultats qui suivent.
Remarque : La condition sur χ peut se réécrire : V ne se prolonge pas en un caractère de G ou alors la restriction à A du prolongement de V à G n'est pas isomorphe à $\mathrm{ind}_{A\cap K}^{A} V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$.
Preuve :
Prenons un opérateur non nul

$$\varphi^+ : \mathrm{ind}_K^G V \to \mathrm{ind}_K^G V'$$

de support $K\varphi_1 K$, ainsi qu'un opérateur non nul

$$\varphi^- : \mathrm{ind}_K^G V' \to \mathrm{ind}_K^G V$$

de support $K\varphi_1^r K$ pour $r \geq 1$ minimal tel que l'on ait $\varphi_1^{r+1} \in \widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)$. On dénote de la manière suivante les opérateurs qu'ils induisent après tensorisation par χ :

$$\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\overline{\varphi}^+} \mathrm{ind}_K^G V' \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\overline{\varphi}^-} \mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p. \tag{50}$$

En effet, comme χ est un caractère de $\mathcal{H}(A, A\cap K, V) = \mathcal{H}\big(A, A\cap K, V'_{U\cap K}\big)$, on peut voir cela après application de la transformée de Satake ; or, la structure de module à gauche et à droite sur $\mathcal{H}(A, A\cap K, V, V'_{U\cap K})$ étant la même une fois identifiées $\mathcal{H}(A, A\cap K, V)$ et $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V'_{U\cap K}\big)$, φ^+ et φ^- induisent bien respectivement $\overline{\varphi}^+$ et $\overline{\varphi}^-$ comme voulu.
On veut montrer que ces morphismes dans (50) sont tous deux non nuls : on va le faire pour $\overline{\varphi}^-$, le cas de $\overline{\varphi}^+$ étant identique. Il suffit de voir que l'image de $[1, v']$ pour $v' \in V'_{U\cap K}$ non nul par φ^- n'est pas dans [8] $\Gamma(V,\chi)$. Notons $p_U : V \twoheadrightarrow V_{U\cap K}$ la projection canonique. Si on fixe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-droites $V'_{U\cap K} \xrightarrow{\sim} V_{U\cap K}$ envoyant v' sur v, et que l'on écrit $K\varphi_1^r K = \coprod_{i\in\mathcal{I}} K\varphi_1^r k_i$, le support X_{φ^-} de

$$\varphi^-([1, v']) = \sum\nolimits_{i\in\mathcal{I}} [k_i^{-1}\varphi_1^{-r}, p_U(k_i v)]$$

vérifie $e_{\mathbb{Z}}(X_{\varphi^-}) = 1$ et $\delta_{\mathcal{T}}(X_{\varphi^-}) = 2r$ (pour ce diamètre, l'argument est le même que dans le lemme 10.4 en appendice). Par la proposition 10.6.(i), $\varphi^-([1, v'])$ n'appartient pas à $\Gamma(V,\chi)$: $\overline{\varphi}^-$ est bien non nul comme voulu.
Comme $\varphi^- \circ \varphi^+$ est un élément de $\mathcal{H}(G, K, V)$, il existe un $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ (la valeur de χ en $\varphi^- \circ \varphi^+$) tel que $\overline{\varphi}^- \circ \overline{\varphi}^+$ soit $\lambda\,\mathrm{id}$. De même, $\overline{\varphi}^+ \circ \overline{\varphi}^-$ est $\lambda'\mathrm{id}$ pour un certain $\lambda' \in \overline{\mathbb{F}}_p$; montrons $\lambda' = \lambda$. On a

$$\lambda'\overline{\varphi}^+ = (\overline{\varphi}^+ \circ \overline{\varphi}^-) \circ \overline{\varphi}^+ = \overline{\varphi}^+ \circ (\overline{\varphi}^- \circ \overline{\varphi}^+) = \lambda\overline{\varphi}^+.$$

Comme $\overline{\varphi}^+$ est non nul, on a bien $\lambda' = \lambda$. Montrons que λ est inversible, et la preuve sera terminée. Par la proposition 9.2.(ii).(a) et la discussion dans la preuve, ainsi que le théorème 6.2, $\mathrm{ind}_K^G V' \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ est isomorphe à une série principale. De ce fait, $\overline{\varphi}^+$ est surjective, $\overline{\varphi}^-$ est injective et $\overline{\varphi}^- \circ \overline{\varphi}^+$ ne peut être nulle. On a ainsi $\lambda \neq 0$ et $\overline{\varphi}^+$ est l'isomorphisme cherché. □

Parmi les V' telles que $V_{U\cap K}$ et $V'_{U\cap K}$ sont conjuguées par $\varphi_1^{\mathbb{Z}}$, une seule au plus n'est pas régulière. Alors, la proposition 9.2.(ii).(a) et la proposition 9.3 (ou bien la proposition 9.2.(ii).(b)) impliquent directement l'énoncé suivant.

Corollaire 9.4 *Soient V une K-représentation irréductible et χ un caractère de $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big)$. On note encore χ le caractère de $\mathcal{H}(G, K, V)$ que l'on obtient en le précomposant par ${}'\mathcal{S}_G$. Soit V' une K-représentation irréductible telle que $V'_{U\cap K}$ et $V_{U\cap K}$ sont conjuguées* [9]. *Supposons $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big) \neq A_\Lambda$ ou bien ($\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big) = A_\Lambda$ et $\chi(\tau_0^1) \neq \chi(\tau_1^0)$). Alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_K^G V' \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$$

de G-représentations.

8. on utilise les notations de l'appendice 10
9. en particulier, grâce à (47), on peut identifier $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V'_{U\cap K}\big)$ et $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big)$, et donc faire de χ un caractère de $\mathcal{H}(G, K, V')$

Preuve : Immédiat. $\square$

On remarque que la proposition 9.2 implique que l'on connaît le K-socle des représentations de Steinberg, c'est-à-dire leur plus grande sous-K-représentation semisimple.

Corollaire 9.5 *Soit ρ_0 un caractère de $F^\times$. On factorise sa restriction à $\mathcal{O}_F^\times$ par la réduction modulo (ϖ_F) :*

$$\rho_0|_{\mathcal{O}_F^\times} : \mathcal{O}_F^\times \twoheadrightarrow k_F^\times \xrightarrow{\overline{\rho}_0} \overline{\mathbb{F}}_p^\times;$$

et on note

$$\eta : k_D^\times \xrightarrow{N_{k_D/k_F}} k_F^\times \xrightarrow{\overline{\rho}_0} \overline{\mathbb{F}}_p^\times. \tag{51}$$

Alors le K-socle de $\mathrm{St}_B\rho_0$ est irréductible et isomorphe à $(\eta \circ \overline{\det}) \otimes \mathrm{Sym}^{\vec{p-1}}\, \overline{\mathbb{F}}_p^2$.

Preuve :
Supposons le K-socle de $\mathrm{St}_B\rho_0$ non irréductible. Alors il existe deux K-représentations irréductibles V_1 et V_2 vérifiant $V_1 \oplus V_2 \subseteq \big(\mathrm{St}_B\rho_0\big)|_K$. Mais alors, par le lemme 2.2, $\big(\mathrm{St}_B\rho_0\big)^{I(1)}$ contiendrait la somme directe $V_1^{I(1)} \oplus V_2^{I(1)}$ de deux droites ; et ceci contredit la proposition 5.4.(i). L'hypothèse initiale est donc fausse et le K-socle de $\mathrm{St}_B\rho_0$ est irréductible.
Soit $V = (\eta \circ \overline{\det}) \otimes \mathrm{Sym}^{\vec{p-1}}\, \overline{\mathbb{F}}_p^2$ avec η comme en (51). Par le lemme 2.2, $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)$ est A_Λ. Soit alors χ le caractère de $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V_{U\cap K}\big)$ défini par $\chi(\tau_0^1) = \chi(\tau_1^0) = \rho_0(\mathrm{Nrm}\,\varpi)$. Par les *(i)* et *(ii)* de la proposition 9.2, on obtient alors un isomorphisme de G-représentations

$$\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G\big(\rho_0 \circ \det_G\big),$$

et donc une surjection

$$\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \twoheadrightarrow \mathrm{St}_B\rho_0.$$

En particulier, on a un morphisme non nul de K-représentations $V \to \mathrm{St}_B\rho_0$; c'est une injection car V est irréductible. Il en résulte que V est le K-socle de $\mathrm{St}_B\rho_0$. $\square$

Il reste uniquement à examiner le cas où V est un caractère de K (en particulier $V|_{A\cap K} = V_{U\cap K}$) vérifiant $\widetilde{Z}_A(V) = A_\Lambda$ et où χ vérifie $\chi(\tau_0^1) = \chi(\tau_1^0)$. C'est l'énoncé suivant.

Proposition 9.6 *Soient V un caractère de K et χ un caractère de $\mathcal{H}\big(A, A\cap K, V\big)$. On note encore χ le caractère $\chi \circ {}'\mathcal{S}_G$ de $\mathcal{H}(G, K, V)$. Supposons $\widetilde{Z}_A(V) = A_\Lambda$ et $\chi(\tau_0^1) = \chi(\tau_1^0)$.*

- *(i) Tout quotient irréductible admissible de $\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ est isomorphe à $\xi \circ \det_G$ où ξ est un caractère de $F^\times$ uniquement déterminé par V et χ.*
- *(ii) Réciproquement, tout caractère de G est quotient d'un $\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ pour une paire (V, χ) comme précédemment.*

Remarque : Il est sans doute vrai que $\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ s'inscrit dans une suite exacte non scindée de G-représentations

$$0 \to \mathrm{St}_B\xi \to \mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \to \xi \circ \det_G \to 0.$$

Preuve :
Soit π un caractère de G : il s'écrit $\pi = \xi \circ \det_G$ pour un certain caractère ξ de $F^\times$. Factorisons la restriction de $\xi|_{\mathcal{O}_F^\times}$ par la réduction modulo (ϖ_F)

$$\xi|_{\mathcal{O}_F^\times} : \mathcal{O}_F^\times \twoheadrightarrow k_F^\times \xrightarrow{\overline{\xi}} \overline{\mathbb{F}}_p^\times,$$

et notons

$$\eta : k_D^\times \xrightarrow{N_{k_D/k_F}} k_F^\times \xrightarrow{\overline{\xi}} \overline{\mathbb{F}}_p^\times.$$

Soit $V = \eta \circ \overline{\det}$, qui est un caractère de K. En particulier, on a $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big) = \widetilde{Z}_A\big(V|_{A\cap K}\big) = A_\Lambda$. Soit χ le caractère de $\mathcal{H}(A, A\cap K, V)$ défini par

$$\chi(\tau_0^1) = \chi(\tau_1^0) = \xi(\mathrm{Nrm}\,\varpi).$$

Il s'agit maintenant de voir que l'on a une surjection

$$\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \twoheadrightarrow \xi \circ \det_G . \tag{52}$$

Or on a la surjection G-équivariante

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_K^G V & \to & \xi \circ \det_G \\ [g,1] & \mapsto & \xi \circ \det_G(g) \end{array},$$

qui passe au quotient pour donner (52) par le lemme 9.1. Le *(ii)* est terminé.
Prouvons maintenant *(i)*. Soit π une représentation irréductible admissible qui est quotient d'une telle $\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$. Ecrivons $V = \xi_K \circ \overline{\det}$ pour ξ_K un caractère de $k_D^\times$. Parce que $\widetilde{Z}_A(V)$ est A_Λ, ξ_K possède la factorisation

$$\xi_K : k_D^\times \xrightarrow{N_{k_D/k_F}} k_F^\times \xrightarrow{\xi'} \overline{\mathbb{F}}_p^\times .$$

Par inflation de ξ' à $\mathcal{O}_F^\times$, on obtient un caractère $\mathcal{O}_F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ que l'on note encore ξ', puis on prolonge ξ' en $\xi_1 : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ par $\xi_1|_{\mathcal{O}_F^\times} = \xi'$ et $\xi_1((-1)^d\varpi_F) = \chi(\tau_0^1)$. Alors la représentation admissible $\pi' = (\xi_1^{-1} \circ \det_G) \otimes \pi$ de G est quotient de $\mathrm{ind}_K^G \mathbb{1} \otimes_{\chi'} \overline{\mathbb{F}}_p$ où $\chi' : \mathcal{H}(G,K) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ est défini par $\chi'(\tau_0^1) = \chi'(\tau_1^0) = 1$.
On cherche maintenant à prouver que π' est la représentation triviale de G. L'espace $(\pi')^K$ est non réduit à 0 (comme π' est quotient de $\mathrm{ind}_K^G \mathbb{1}$) et on choisit alors un vecteur $v \in (\pi')^K$ propre pour tous les opérateurs de Hecke de l'algèbre commutative $\mathcal{H}(G,K)$. En particulier, si T_1 est l'opérateur de $\mathcal{H}(G,K)$ de support $K\varphi_1^{-1}K$ et valant l'identité en φ_1^{-1}, on a (par définition de ${}'\mathcal{S}_G$ et Proposition 6.10 de [HV11]) :

$$vT_1 = \chi(T_1)v = \chi \circ {}'\mathcal{S}_G(T_1)v = \chi(\tau_0^1)^{-1}v = v.$$

Parce que $v \in (\pi')^K$ est aussi $I(1)$-invariant, on veut de plus comprendre l'action de T_1 en fonction de celles d'opérateurs de $\mathcal{H}(G, I(1))$. On a la formule d'action

$$vT_1 = \sum_{\gamma \in K\backslash K\varphi_1^{-1}K} \gamma^{-1}v = \sum_{u \in (K\cap\varphi_1 K\varphi_1^{-1})\backslash K} u^{-1}\varphi_1 v;$$

parce que $\{s\} \coprod \{n([a]) \mid a \in k_D\}$ est un ensemble de représentants de $(K \cap \varphi_1 K \varphi_1^{-1})\backslash K$, on a par la formule (8),

$$v = vT_1 = vT^{(-1)} + vT^{(-1)}S. \tag{53}$$

On a par suite :

$$v\big(T^{(-1)}S\big)^2 = (v - vT^{(-1)})(T^{(-1)}S) = vT^{(-1)}S - v(T^{(-1)})^2S = vT^{(-1)}S - vS(T^{(-1)})^2.$$

De plus, on a, en caractéristique p :

$$vS = \sum_{a\in k_D} n([a])sv = \sum_{a \in k_D} v = 0.$$

D'où $v\big(T^{(-1)}S\big)^2 = vT^{(-1)}S$. En notant $(\pi')^K_{\mathrm{pr}}$ le sous-espace de $(\pi')^K$ des éléments propres pour $\mathcal{H}(G,K)$, on a par lemme des noyaux

$$(\pi')^K_{\mathrm{pr}} = (\pi')^K_{\mathrm{pr}}\big|_{(T^{(-1)}S)^2 - T^{(-1)}S = 0} = (\pi')^K_{\mathrm{pr}}\big|_{T^{(-1)}S=0} \oplus (\pi')^K_{\mathrm{pr}}\big|_{T^{(-1)}S=1}. \tag{54}$$

Sur $(\pi')^K_{\mathrm{pr}}\big|_{T^{(-1)}S=1}$, $T^{(-1)}$ agit par 0 à cause de (53). Il en résulte par (54) que $T^{(-1)}S$ est identiquement nul sur $(\pi')^K_{\mathrm{pr}}$. Il s'ensuit que $v \in (\pi')^K_{\mathrm{pr}}$ vérifie $vT^{(-1)} = \omega v = v$. Parce que ω et K engendrent G, v génère la représentation triviale de G. Par irréductibilité de π', on a $\pi' = \mathbb{1}$ et le résultat est prouvé. $\square$

On est maintenant à même de donner un théorème de classification.

Théorème 9.7 *Toute représentation irréductible admissible de G est isomorphe à l'une des représentations suivantes :*

(a) $\xi \circ \det_G$ *où* ξ *est un caractère de* $F^\times$ *;*

(b) $\mathrm{St}_B \xi$ *où* ξ *est un caractère de* $F^\times$ *;*

(c) $\mathrm{Ind}_B^G \rho_1 \otimes \rho_2$ *où* ρ_1, ρ_2 *sont deux représentations irréductibles de* $D^\times$ *satisfaisant (a) ou (b) du corollaire 8.2 ;*

(d) une représentation supersingulière.

De plus, il n'y a pas d'entrelacement entre deux représentations quelconques de la liste ci-dessus.

Preuve :
Le fait que toute représentation irréductible admissible π de G soit de l'une des formes mentionnées suit de la discussion au début du paragraphe et des propositions 9.2 et 9.6.
Aussi, la classe d'isomorphisme de π possède comme invariant l'ensemble $\Pi(\pi)$ des paires (V, χ) où V est une K-représentation irréductible et $\chi : \mathcal{H}(G, K, V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ est un caractère de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres tels que l'on ait une surjection $\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p \twoheadrightarrow \pi$. Notons $\Pi_{\mathrm{ns}}(\pi)$ le sous-ensemble « non supersingulier » de $\Pi(\pi)$, c'est-à-dire

$$\Pi_{\mathrm{ns}}(\pi) = \{(V, \chi) \in \Pi(\pi) \mid \chi \text{ se factorise par } {}'\mathcal{S}_G\}.$$

Par les propositions 9.2 et 9.6, on connaît les quotients irréductibles admissibles des $\mathrm{ind}_K^G V \otimes_\chi \overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout χ se factorisant par ${}'\mathcal{S}_G$ et on remarque que les ensembles $\Pi_{\mathrm{ns}}(\pi)$ sont deux à deux distincts pour π dans les cas *(a)*, *(b)* ou *(c)*. Aussi, par définition, on a $\Pi_{\mathrm{ns}}(\pi) = \varnothing$ si et seulement si π est dans le cas *(d)*. Cela conclut quant à l'absence d'entrelacement. $\square$

On finit par énoncer la conséquence suivante. On rappelle qu'une représentation irréductible de G est dite *supercuspidale* si elle n'est pas sous-quotient d'une $\mathrm{Ind}_B^G \rho$ avec ρ irréductible admissible.

Corollaire 9.8 *Soit* π *une représentation irréductible admissible de* G*. Alors* π *est supersingulière si et seulement si elle est supercuspidale.*

10 Support des fonctions dans l'image d'opérateurs de Hecke

Soit V une K-représentation irréductible. Pour étudier l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K, V)$ sur $\mathrm{ind}_K^G V$, on va regarder un peu la combinatoire de $K\backslash G$. L'espace $K\backslash G$ se plonge dans une infinité dénombrable de copies d'un arbre de Bruhat-Tits (au sens de [Ser77], avec action de G via $g.(Kx) = Kxg^{-1}$) pour PGL_2. On définit le morphisme de groupes $v_G = \dfrac{1}{d} v_D \circ \det_G : G \to \mathbb{Z}$ et $\beta : K\backslash G \to K\varpi^{\mathbb{Z}}\backslash G$ la projection canonique.

Lemme 10.1

(i) L'application

$$\begin{array}{rccc} (\beta, v_{\mathcal{T}}) : & K\backslash G & \to & K\varpi^{\mathbb{Z}}\backslash G \times \mathbb{Z} \\ & g & \mapsto & (\beta(g), v_G(\widetilde{g})) \end{array},$$

où $\widetilde{g}$ *est un relèvement quelconque de* g *dans* G*, est une injection ensembliste.*

(ii) L'espace $K\varpi^{\mathbb{Z}}\backslash G$ *peut être naturellement muni de la structure d'arbre de Bruhat-Tits de* $\mathrm{PGL}(2, D)$*, que l'on notera* $\mathcal{T}$*.*

Preuve :
Parce que $\det_G$ envoie K sur $\mathcal{O}_F^\times$, c'est clair pour *(i)*. Pour *(ii)*, on se reportera à [Ser77], qui ne suppose pas la commutativité du corps de base et rentre ainsi dans notre cadre. $\square$

On remarque que l'injection définie au lemme 10.1.(i) identifie $K\backslash G$ à un sous-ensemble discret de l'espace métrique qu'est l'immeuble élargi de G (voir [Lan00], paragraphe 1.3). Cependant la métrique usuelle sur l'immeuble élargi ne nous intéresse pas vraiment et on préfère considérer des invariants qui

distinguent bien $K\varpi^{\mathbb{Z}}\backslash G$ et $\mathbb{Z}$: c'est ce que l'on présente maintenant.
Soit $d_{\mathcal{T}}$ la distance usuelle sur l'espace $\mathcal{T}_0 = K\varpi^{\mathbb{Z}}\backslash G$ des sommets de $\mathcal{T}$: deux sommets x et y de $\mathcal{T}$ sont à distance 1 si et seulement si il existe une arête de $\mathcal{T}$ qui les relie. On a, pour tout $n \geq 0$,

$$d_{\mathcal{T}}(x,y) = n \Leftrightarrow xy^{-1} \in K\varphi_1^n \varpi^{\mathbb{Z}} K. \tag{55}$$

On se sert de $d_{\mathcal{T}}$ pour définir un diamètre $\delta_{\mathcal{T}}$ sur l'ensemble $\mathcal{T} \times \mathbb{Z}$ de sommets $K\backslash G$ par $(\beta, v_{\mathcal{T}})^{-1}$.
Soit X une partie finie non vide de $K\backslash G$; on note

$$X_{(c)} = \{x \in X \mid v_{\mathcal{T}}(x) = c\}, \quad \delta_c(X) = \max\{d_{\mathcal{T}}(\beta(x), \beta(y)) \mid x, y \in X_{(c)}\},$$

$$\delta_{\mathcal{T}}(X) = \max\{\delta_c(X) \mid c \in v_{\mathcal{T}}(X)\}.$$

Aussi, on définit l'étendue $e_{\mathbb{Z}}$ de X par :

$$e_{\mathbb{Z}}(X) = \max\{v_{\mathcal{T}}(x) \mid x \in X\} - \min\{v_{\mathcal{T}}(x) \mid x \in X\} + 1.$$

Par convention, on prendra $\delta_{\mathcal{T}}(\varnothing) = 0$ et $e_{\mathbb{Z}}(\varnothing) = 0$.

Si on munit $\mathcal{T} \times \mathbb{Z}$ de l'action de G définie par

$$g.\big(K\varpi^{\mathbb{Z}}h, a\big) = \big(K\varpi^{\mathbb{Z}}hg^{-1}, a + v_G(g)\big), \tag{56}$$

alors l'injection $(\beta, v_{\mathcal{T}})$ est G-équivariante. On remarque que l'action (56) de G sur $\mathcal{T}$ est $d_{\mathcal{T}}$-isométrique. Cela implique facilement l'énoncé suivant.

Lemme 10.2 *Soit X une partie finie de $K\backslash G$. Alors, pour tout $g \in G$, on a $e_{\mathbb{Z}}(gX) = e_{\mathbb{Z}}(X)$ et $\delta_{\mathcal{T}}(gX) = \delta_{\mathcal{T}}(X)$.*

Preuve : Immédiat. □

On rappelle que V désigne une représentation irréductible de K. Le support d'une fonction de $\operatorname{ind}_K^G V$ est une partie finie de $K\backslash G$, et l'objectif de ce paragraphe est de donner des conditions nécessaires sur $\delta_{\mathcal{T}}(X)$ et $e_{\mathbb{Z}}(X)$ pour qu'une fonction de support X soit dans l'image de certains opérateurs de Hecke de $\mathcal{H}(G,K,V)$.
Soit $\chi : \mathcal{H}(G,K,V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres qui se factorise par $'\mathcal{S}_G$. On définit le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel

$$\Gamma(V,\chi) = \ker\big(\operatorname{ind}_K^G V \to \operatorname{ind}_K^G V \otimes_{\chi} \overline{\mathbb{F}}_p\big).$$

On suppose à présent $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)$ de la forme $\begin{pmatrix} \varpi^{d_0\mathbb{Z}} & 0 \\ 0 & \varpi^{d_0\mathbb{Z}} \end{pmatrix}$ pour un diviseur $d_0 \geq 1$ de d. Cela nous assure en particulier que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K,V)$ est engendrée par les opérateurs suivants : l'opérateur T de support $K\varphi_1^{d_0}K$ et induisant l'identité sur $V_{U\cap K}$, l'opérateur Z de support $\varpi^{d_0}K$ et induisant l'identité sur V, et son inverse Z^{-1} (voir [HV11], paragraphe 7.3). De ce fait, une famille génératrice de $\Gamma(V,\chi)$ est donnée par les $T^iZ^j[g,v] - \chi(T^iZ^j)[g,v]$ pour $i \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$, $g \in G$ et $v \in V$.

Lemme 10.3 *Soient V, χ, d_0 comme précédemment. Soit x un élément de $\Gamma(V,\chi)$ engendré par les $Z^j[g,v] - \chi(Z^j)[g,v]$. Alors le support X_x de x est d'étendue $e_{\mathbb{Z}}(X_x)$ nulle ou strictement supérieure à $2d_0$.*

Preuve :
Soit x un élément de $\Gamma(V,\chi)$ engendré par les $Z^j[g,v] - \chi(Z^j)[g,v]$. On écrit

$$x = \sum\nolimits_{g \in \mathcal{I}} Z^{j_g}[g, v_g] - \chi(Z^{j_g})[g, v_g], \tag{57}$$

où $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble fini de G et les $v_g \in V$ pour tout $g \in \mathcal{I}$. On suppose l'écriture (57) minimale, au sens de $|\mathcal{I}|$ minimal. L'étendue $e_{\mathbb{Z}}(X_x)$ du support X_x de x est nulle si et seulement si x est nul. Supposons x non nul et montrons que $e_{\mathbb{Z}}(X_x)$ est strictement supérieure à $2d_0$.
L'ensemble $\mathcal{I}$ est non vide puisque x est non nul. On prend alors $g \in \mathcal{I}$ et le terme $Z^{j_g}[g, v_g] - \chi(Z^{j_g})[g, v_g]$ apparaît dans l'écriture (57). On allège les notations en $v = v_g$, $j = j_g$ pour la suite. On a l'alternative suivante : ou bien Kg^{-1} et $K\varpi^{jd_0}g^{-1}$ sont tous deux dans X_x, ou bien l'un au moins ne l'est pas. Dans le premier cas, on a

$$e_{\mathbb{Z}}(X_x) \geq 2jd_0 + 1 \geq 2d_0 + 1$$

puisque j est non nul par minimalité de $|\mathcal{I}|$; la preuve est terminée.
Montrons que le second cas aboutit à une contradiction. En effet, disons que Kg^{-1} n'est pas dans le support de x, le cas de $K\varpi^{jd_0}g^{-1}$ étant similaire grâce à l'identité

$$Z^j[g, v] - \chi(Z^j)[g, v] = -\chi(Z^j)\big(Z^{-j}[g\varpi^{-jd_0}, v] - \chi(Z^{-j})[g\varpi^{-jd_0}, v]\big). \tag{58}$$

Alors il existe $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{I}$ (avec $n \geq 1$) vérifiant $Kg_k^{-1} = Kg^{-1}$ pour tout k, et tels que si on écrit $[g, v'_k] = [g_k, v_{g_k}]$ (c'est-à-dire $v'_k = g^{-1}g_k v_{g_k}$) alors on a

$$\chi(Z^j)\, v + \sum_{k=1}^{n} \chi(Z^{j_{g_k}})\, v'_k = 0 \tag{59}$$

(quitte à utiliser (58) pour les j_{g_k} au lieu de j). On veut alors raccourcir l'écriture de

$$y = Z^j[g, v] - \chi(Z^j)[g, v] + \sum_{k=1}^{n} \big(Z^{j_{g_k}}[g, v'_k] - \chi(Z^{j_{g_k}})[g, v'_k]\big). \tag{60}$$

A cause de (59), on a

$$y = Z^j[g, v] + \sum_{k=1}^{n} Z^{j_{g_k}}[g, v'_k].$$

On réutilise à nouveau (59) pour développer $Z^j[g, v]$ et obtenir :

$$\begin{aligned} y &= -\sum_{k=1}^{n} \chi(Z^{-j})\chi(Z^{j_{g_k}})\, Z^j[g, v'_k] + \sum_{k=1}^{n} Z^{j_{g_k}}[g, v'_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(Z^{j_{g_k}-j}[g\varpi^{-jd_0}, v'_k] - \chi(Z^{j_{g_k}-j})[g\varpi^{-jd_0}, v'_k]\big). \end{aligned}$$

Cette expression de y est plus courte que l'écriture initiale ; et si on injecte cela dans (57), cela contredit la minimalité de $|\mathcal{I}|$. C'est ce qu'on voulait et la preuve est terminée. $\square$

On note $p_U : V \to V_{U\cap K}$ la projection canonique.

Lemme 10.4 *Soient V, χ, d_0 comme précédemment. Soient $g \in G$, $v \in V$ non nul et*

$$y(g, v) = T[g, v] - \chi(T)[g, v], \quad y'(g, v) = Z^{-1}T[g, \chi(Z)v] - \chi(T)[g, v].$$

(i) Le support X_y de $y(g, v)$ est d'étendue $e_{\mathbb{Z}}(X_y)$ égale à $d_0 + 1$ et de diamètre $\delta_{\mathcal{T}}(X_y)$ égal à $2d_0$.

(ii) Le support $X_{y'}$ de $y'(g, v)$ est d'étendue $e_{\mathbb{Z}}(X_{y'})$ égale à d_0+1 et de diamètre $\delta_{\mathcal{T}}(X_{y'})$ égal à $2d_0$. Si on écrit $K\varphi_1^{d_0}K = \coprod_{i=1..r} K\varphi_1^{d_0}k_i$ pour des $k_i \in K$, alors on pose

$$z(g, v) = y(g, v) + \chi(T)^{-1}\sum_{i=1}^{r} y'\big(gk_i^{-1}\varphi_1^{-d_0}, p_U(k_i v)\big).$$

(iii) Le support X_z de $z(g,v)$ est d'étendue $e_{\mathbb{Z}}(X_z)$ égale à 1 et de diamètre $\delta_{\mathcal{T}}(X_z)$ égal à $4d_0$.

Preuve :
Si on écrit $K\varphi_1^{d_0}K = \coprod_{i=1,..,r} K\varphi_1^{d_0}k_i$ pour des $k_i \in K$, alors on a

$$y(g,v) = -\chi(T)[g,v] + \sum_{i=1,..,r} [gk_i^{-1}\varphi_1^{-d_0}, p_U(k_i v)].$$

Chacun des supports des fonctions $[gk_i^{-1}\varphi_1^{-d_0}, p_U(k_i v)]$ est un sommet $x_i \in K\backslash G$ avec $v_{\mathcal{T}}(x_i) = v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) + d_0$. Voyons que suffisamment de $p_U(k_i v)$ sont non nuls. En effet, le noyau de p_U est engendré linéairement par les $v' - u.v'$ pour $v' \in V$ et $u \in U \cap K$. En particulier, $\operatorname{Ker} p_U$ est stable par l'Iwahori I. Supposons que $k \notin I$ envoie un élément $v' \in \operatorname{Ker} p_U$ non nul dans $\operatorname{Ker} p_U$. Alors, par décomposition de Bruhat, k est dans IsI ; et le sous-groupe de K engendré par k et I est K. De cette manière, $K.v' \subseteq \operatorname{Ker} p_U$ est une sous-K-représentation de V qui est de codimension au moins 1, et cela contredit l'irréductibilité de V. On en déduit que $k.v, k'.v \in \operatorname{Ker} p_U$ implique $k'k^{-1} \in I$, et au plus $|K \cap \varphi_1^{-d_0}K\varphi_1^{d_0}\backslash I| = q^{d(d_0-1)}$ parmi les $|K \cap \varphi_1^{-d_0}K\varphi_1^{d_0}\backslash K| = q^{d(d_0-1)}(q^d+1)$ vecteurs $p_U(k_i v)$ peuvent s'annuler.
A cause de cela, et parce que $\chi(T)$ est non nul, X_y est d'étendue d_0+1. Enfin, parmi les $q^{d(d_0-1)}(q^d+1)$ sommets à distance d_0 de $\beta(Kg^{-1})$, au moins q^{dd_0} d'entre eux portent une fonction non nulle : il en existe alors deux qui réalisent le diamètre $\delta_{\mathcal{T}}(X_y) = 2d_0$. En effet, si on fixe $\beta(K(g')^{-1})$ à distance d_0 de $\beta(Kg^{-1})$, il y a $q^{d(d_0-1)}$ sommets à distance d_0 de $\beta(Kg^{-1})$ et à distance strictement inférieure à $2d_0$ de $\beta(K(g')^{-1})$; comme on dispose d'au moins q^{dd_0} sommets, l'affirmation est vérifiée.
Pour $y'(g,v)$, il s'agit de voir que l'on a

$$y'(g,v) = y(g,v) + Z^{-1}T[g,\chi(Z)v] - \chi(Z^{-1})\,T[g,\chi(Z)v],$$

et on obtient

$$X_{y'} \smallsetminus \{Kg^{-1}\} = \varpi^{-d_0}\big(X_y \smallsetminus \{Kg^{-1}\}\big).$$

Le *(ii)* s'en déduit.
Notons que $z(g,v)$ est bien défini parce que T l'est. On écrit

$$z(g,v) = -\chi(T)[g,v] + \sum_{1\le i,j\le r} \chi(Z)\chi(T)^{-1}\big[gk_i^{-1}\varphi_1^{-d_0}k_j^{-1}\varphi_2^{d_0}, p_U(k_j p_U(k_i v))\big]$$

où on remarque que chacun des supports des fonctions de la somme de droite est un sommet $x_{ij} \in K\backslash G$ vérifiant $v_{\mathcal{T}}(x_{ij}) = v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1})$. En particulier, X_z est d'étendue au plus 1 : en prouvant que son diamètre est $4d_0$, on prouvera alors que $z(g,v)$ est non nul si v est non nul, de sorte que l'étendue de X_z sera exactement égale à 1. On voit que si i est différent de i', les sommets $\beta(x_{ij}) = K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_2^{-d_0}k_j\varphi_1^{d_0}k_i g^{-1}$ et $\beta(x_{i'j'})$ sont à distance $4d_0$ l'un de l'autre : en effet, comme $K\varpi^{\mathbb{Z}}\backslash G$ est muni d'une structure d'arbre, il suffit de voir que le chemin

$$\begin{aligned} K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_2^{-d_0}k_j\varphi_1^{d_0}k_i g^{-1} &\rightsquigarrow K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_2^{-d_0+1}k_j\varphi_1^{d_0}k_i g^{-1} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1^{d_0}k_i g^{-1} \\ &\rightsquigarrow K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1^{d_0-1}k_i g^{-1} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow K\varpi^{\mathbb{Z}}g^{-1} \rightsquigarrow K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1 k_{i'}g^{-1} \rightsquigarrow \ldots \\ &\rightsquigarrow K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1^{d_0}k_{i'}g^{-1} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_2^{-d_0}k_{j'}\varphi_1^{d_0}k_{i'}g^{-1} \end{aligned}$$

ne possède pas d'aller-retour (c'est-à-dire de cycle de longueur 2). Et c'est précisément ce qu'assure la condition $i \neq i'$. On notera aussi que ce chemin est de longueur strictement inférieure à $4d_0$ s'il y a un aller-retour (au moins) ; en particulier on a d'ores et déjà $\delta_{\mathcal{T}}(X_z) \le 4d_0$.
Aussi, par l'argument du (ii), au plus $q^{d(2d_0-1)}$ des vecteurs $p_U(k_i v)$ peuvent s'annuler : on prend deux sommets $K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1^{d_0}k_i g^{-1}$ et $K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1^{d_0}k_{i'}g^{-1}$ tels que $p_U(k_i v)$ et $p_U(k_{i'}v)$ ne s'annulent pas. Parmi les sommets à distance $2d_0$ de $K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1^{d_0}k_i g^{-1}$ (resp. $K\varpi^{\mathbb{Z}}\varphi_1^{d_0}k_{i'}g^{-1}$) seuls $q^{d(2d_0-1)}$ peuvent porter un vecteur $p_U(k_j p_U(k_i v))$ (resp. $p_U(k_{j'}p_U(k_{i'}v))$) qui s'annule. Deux tels $\beta(x_{ij})$ et $\beta(x_{i'j'})$ portant des vecteurs qui ne s'annulent pas assurent l'étendue voulue puisqu'ils vérifient $v_{\mathcal{T}}(x_{ij}) = v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = v_{\mathcal{T}}(x_{i'j'})$. La preuve est terminée. $\square$

Lemme 10.5 *Soient V, χ, d_0 comme précédemment. Soit x un élément non nul de $\Gamma(V,\chi)$. Supposons que le support X_x de x vérifie $e_{\mathbb{Z}}(X_x) \leq d_0+1$. Il existe $a \in \mathbb{Z}$, des ensembles finis disjoints $\mathcal{I}_1 \subseteq v_G^{-1}(\{-a\})$, $\mathcal{I}_2 \subseteq v_G^{-1}(\{-a-d_0\})$, $\mathcal{I}_3 \subseteq v_G^{-1}(]-a-d_0,-a[\cap\mathbb{Z})$ et des $v_g \in V$ pour tout $g \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$ tels que l'on ait*

$$x = \sum_{g\in\mathcal{I}_1} y(g,v_g) + \sum_{g\in\mathcal{I}_2} y'(g,v_g) + \sum_{g\in\mathcal{I}_3} z(g,v_g).$$

Preuve :
Ecrivons x comme une somme finie

$$x = \sum\nolimits_i T^{r_g} Z^{s_g}[g,v_g] - \chi(T^{r_g}Z^{s_g})[g,v_g]$$

pour des $g \in G$, $r_g \geq 0$, $s_g \in \mathbb{Z}$ et $v_g \in V$. En utilisant successivement la relation

$$T^iZ^j[g,v] - \chi(T^iZ^j)[g,v] = \big(T^i[g\varpi^{-j},v] - \chi(T^i)[g\varpi^{-j},v]\big) + \big(Z^j[g,\chi(T^i)v] - \chi(Z^j)[g,\chi(T^i)v]\big),$$

on peut réécrire x sous la forme

$$\sum_{g\in\mathcal{I}} \big(T^{r_g}[g,v_g] - \chi(T^{r_g})[g,v_g]\big) + \sum_{g\in\mathcal{J}} \big(Z^{s_g}[g,v'_g] - \chi(Z^{s_g})[g,v'_g]\big).$$

Quitte à développer chacun des $T^{r_g}[g,v_g] - \chi(T^{r_g})[g,v_g]$ récursivement grâce à la formule (pour $k \geq 1$)

$$T^{k+1}[g,v] - \chi(T^{k+1})[g,v] = (T-\chi(T))(T^k[g,v]) + T^k[g,\chi(T)v] - \chi(T^k)[g,\chi(T)v],$$

on peut supposer $r_g = 1$ pour tout $g \in \mathcal{I}$: c'est ce qu'on fera par la suite. Notons a le minimum des $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1})$ pour $Kg^{-1} \in X_x$. Quitte à translater les sommets à l'aide de relations du type $Z^s[g,v] - \chi(Z^s)[g,v]$, on peut supposer $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) \in [a, a+2d_0-1]$ et on le suppose par la suite. Aussi, en réutilisant à nouveau des relations $Z^s[g,v] - \chi(Z^s)[g,v]$ pour transformer les $y(g,v_g)$ en $y'(g,v_g)$ lorsque l'on a $a+d_0 \leq v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) < a+2d_0$, on écrit x sous la forme

$$x = \sum_{g\in\mathcal{I}_1} y(g,v_g) + \sum_{g\in\mathcal{I}_2} y'(g,v_g) + \sum_{g\in\mathcal{J}} \big(Z^{s_g}[g,v'_g] - \chi(Z^{s_g})[g,v'_g]\big),$$

où on a $a \leq v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) < a+d_0$ pour tout $g \in \mathcal{I}_1$ et $a+d_0 \leq v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) < a+2d_0$ pour tout $g \in \mathcal{I}_2$. Parce que le support de x est d'étendue inférieure ou égale à d_0, avec

$$\min\{v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) \mid Kg^{-1} \in X_x\} = a,$$

$$x' = x - \sum_{g\in\mathcal{I}_1} y(g,v_g) - \sum_{g\in\mathcal{I}_2} y'(g,v_g) = \sum_{g\in\mathcal{J}} \big(Z^{s_g}[g,v'_g] - \chi(Z^{s_g})[g,v'_g]\big)$$

a un support ayant une étendue inférieure ou égale à $2d_0$ (par le lemme 10.4). Par le lemme 10.3, x' est nul.
Fixons un entier $c \in]a, a+d_0[$ (si cet intervalle n'intersecte pas $\mathbb{Z}$, il n'y a rien à faire) et regardons les sommets Kg^{-1} dans $\mathcal{I}_1$ avec $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = c$. On considère le « diamètre des centres » sur $\mathcal{I}_1$:

$$\delta_c^1 = \delta_c\big(\{Kg^{-1} \mid g \in \mathcal{I}_1\}\big).$$

Deux Kg_i^{-1} et Kg_j^{-1} réalisant ce diamètre δ_c^1 possèdent (voir la preuve du lemme 10.4 à propos de $\operatorname{Ker} p_U$) des éléments à distance $\delta_c^1 + 2d_0$ dans leur support qui sont extrémaux et sont donc dans X_x, à moins qu'ils ne s'annulent avec des sommets de $\mathcal{I}_2$. Dans le cas où ils ne s'annulent pas avec des sommets de $\mathcal{I}_2$, cela contredit $e_{\mathbb{Z}}(X_x) \leq d_0+1$: ils sont donc contraints à s'annuler avec des sommets de $\mathcal{I}_2$. De ce fait, pour chaque $g \in \mathcal{I}_1$ avec $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = c$, on utilise l'identité

$$y(g,v_g) = z(g,v_g) - \sum_{j=1}^{r} y'\big(gk_j^{-1}\varphi_1^{-d_0}, p_U(k_jv_g)\big) :$$

on déplace les tels indices g dans un ensemble $\mathcal{I}_3$ (qui indice les $z(g, v_g)$) et on rajoute ceux correspondants aux $y'\big(gk_j^{-1}\varphi_1^{-d_0}, p_U(k_j v_g)\big)$ dans $\mathcal{I}_2$ (en renumérotant convenablement). En effectuant cela pour tous les $c \in]a, a+d_0[\cap\mathbb{Z}$, il ne reste plus dans $\mathcal{I}_1$ que des sommets vérifiant $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = a$.
Pour les sommets Kg^{-1} pour $g \in \mathcal{I}_2$, de deux choses l'une : ou bien ils font partie du support X_x, et comme X_x est d'étendue d_0+1 au plus, on a alors $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = a + d_0$. Ou bien ils s'annulent avec un sommet indicé dans $\mathcal{I}_1$, mais alors ils vérifient aussi $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = a + d_0$ (puisque ceux de $\mathcal{I}_1$ vérifient $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = a$). Dans les deux cas, on a bien l'écriture voulue. $\square$

Proposition 10.6 *Soient V une représentation irréductible de K et $d_0 \geq 1$ avec $\widetilde{Z}_A\big(V_{U\cap K}\big)$ de la forme $\begin{pmatrix} \varpi^{d_0\mathbb{Z}} & 0 \\ 0 & \varpi^{d_0\mathbb{Z}} \end{pmatrix}$ et χ un caractère de $\mathcal{H}(G, K, V)$ se factorisant par ${}'\mathcal{S}_G$. Soit x un élément non nul de $\Gamma(V, \chi)$.*

(i) Le support X_x de x vérifie $e_{\mathbb{Z}}(X_x) \geq d_0 + 1$ ou $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) \geq 2d_0$.

(ii) Si X_x satisfait $e_{\mathbb{Z}}(X_x) = d_0 + 1$ et $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) = 2d_0$, alors il existe $g, g' \in G$ et $v, v' \in V$ (avec éventuellement l'un d'eux nul) tels que l'on ait $x = y(g, v) + y'(g', v')$. Si de plus v et v' sont non nuls, alors on a $v_G(g) = v_G(g') + d_0$.

Preuve :
Parce que x est non nul, on a $e_{\mathbb{Z}}(X_x) \geq 1$. Supposons $e_{\mathbb{Z}}(X_x) \leq d_0$ et montrons $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) \geq 2d_0$. On prend $a \in \mathbb{Z}$, des ensembles finis $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ et des $v_g \in V$ tous non nuls comme dans le lemme 10.5 pour écrire

$$x = \sum\nolimits_{g\in\mathcal{I}_1} y(g, v_g) + \sum\nolimits_{g\in\mathcal{I}_2} y'(g, v_g) + \sum\nolimits_{g\in\mathcal{I}_3} z(g, v_g). \tag{61}$$

Dans une telle écriture, on suppose le cardinal de $\mathcal{I}_3$ minimal. Si $\mathcal{I}_3$ est non vide, on va voir $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) \geq 4d_0$. En effet, dans ce cas-là, il existe un $c \in]a, a + d_0[$ tel que $\mathcal{I}_3$ possède un élément g avec $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = c$. On prend le diamètre des centres sur $\mathcal{I}_3$:

$$\delta_c^3 = \delta_c\big(\{Kg^{-1} \mid g \in \mathcal{I}_3\}\big).$$

Deux Kg_i^{-1} et Kg_j^{-1} réalisant ce diamètre δ_c^3 possèdent (voir la preuve du lemme 10.4 à propos de $\operatorname{Ker} p_U$, à appliquer deux fois) des éléments à distance $\delta_c^3 + 4d_0$ dans le support. Comme ces derniers sont extrémaux, ils ne peuvent pas être annulés par d'autres de $\mathcal{I}_3$ et on a $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) \geq 4d_0$ comme annoncé.
Supposons donc à présent $\mathcal{I}_3 = \varnothing$ dans l'écriture (61). On considère (on ne regarde pas « par tranches » cette fois-ci)

$$\delta^{12} = \max_{g,h\in\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2} d_{\mathcal{T}}(\beta(Kg^{-1}), \beta(Kh^{-1})).$$

Deux Kg^{-1} et Kh^{-1} réalisant ce diamètre possèdent des éléments dans le support de $y(g, v_g)$ ou $y'(g, v_g)$ (selon $g \in \mathcal{I}_1$ ou $g \in \mathcal{I}_2$) et $y(h, v_h)$ ou $y'(h, v_h)$ qui subsistent dans X_x par maximalité. Si g et h sont tous deux dans le même ensemble d'indices $\mathcal{I}_1$ ou $\mathcal{I}_2$, alors on a $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) = \delta^{12} + 2d_0 \geq 2d_0$. Cela fournit déjà *(i)* et le cas d'égalité implique alors $\delta^{12} = 0$. Ceci nous assure $Kg^{-1} = Kh^{-1}$ grâce à $v_{\mathcal{T}}(Kg^{-1}) = v_{\mathcal{T}}(Kh^{-1})$ et au lemme 10.1. La preuve est alors terminée dans ce cas-là, puisque pour la même raison $\mathcal{I}_2$ est vide ou un singleton.
Supposons maintenant $g \in \mathcal{I}_1$ et $h \in \mathcal{I}_2$ (le cas inverse étant identique). On prend $g' \in \mathcal{I}_1$ tel que $K(g')^{-1}$ est à distance maximale

$$\delta^1(g) = \max_{g'\in\mathcal{I}_1} d_{\mathcal{T}}(\beta(Kg^{-1}), \beta(K(g')^{-1}))$$

de Kg^{-1}. Ou bien, deux [10] au moins des sommets du support de $T[g', v_{g'}]$ sont dans X_x, ou bien tous sauf un au plus sont annulés par des sommets indicés par $\mathcal{I}_2$. Dans le premier cas, on a ce que l'on voulait : $\delta_{\mathcal{T}}(X_x)$ est supérieur ou égal à $\delta^1(g) + 2d_0$, et le cas d'égalité donne $Kg^{-1} = K(g')^{-1}$. Dans le second cas, les sommets de $T[g', v_{g'}]$ sont annulés par des $[h', v_{h'}]$ pour $h' \in \mathcal{I}_2$ de support des sommets à distance $2d_0$ les uns des autres. Parce que $K(g')^{-1}$ est extrémal (au sens qu'il réalise $\delta^1(g)$), les sommets des

10. il faut défausser celui situé sur le chemin entre Kg^{-1} et $K(g')^{-1}$

$Z^{-1}T[h', v_{h'}]$ ne peuvent pas tous être annulés par des $[g_a, v_a]$ avec $g_a \in \mathcal{I}_1$, et on a alors $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) \geq 4d_0$. En particulier, il n'y a pas d'égalité $\delta_{\mathcal{T}}(X_x) = 2d_0$ dans ce cas-là.
On fait de même pour $h \in \mathcal{I}_2$ et cela termine la preuve. $\square$

Remerciements : Ce travail est une partie de ma thèse de doctorat, réalisée sous la direction de Marie-France Vignéras. Je lui suis infiniment reconnaissant pour les questions et remarques qu'elle a pu me communiquer pendant la préparation de ce papier. Je remercie aussi Guy Henniart et Florian Herzig pour leur relecture attentive de ce texte.

Références

[BH06] Colin J. Bushnell and Guy Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), 2006.

[BL94] Laure Barthel and Ron Livne, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.

[BL95] ———, *Modular representations of* GL_2 *of a local field : the ordinary, unramified case*, Journal of Number Theory **55** (1995), 1–27.

[Bou58] Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématique*, vol. II, ch. 8, 1958.

[Bre03] Christophe Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *I*, Compositio Math. **138** (2003), 165–188.

[CE04] Marc Cabanes and Michel Enguehard, *Representation theory of finite reductive groups*, 2004.

[Dia07] Fred Diamond, *A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups*, L-functions and Galois representations (London Mathematical Society, ed.), 2007, pp. 187–206.

[Her11] Florian Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic* GL_n, Inventiones Mathematicae **186** (2011), no. 2, 373–434.

[HV11] Guy Henniart and Marie-France Vignéras, *A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields*, preprint (2011), `http://www.math.jussieu.fr/~vigneras/satake_isomorphism-07032012.pdf`.

[HV12] ———, *Comparison of compact induction with parabolic induction*, Pacific Journal of Mathematics **260** (2012), no. 2, 457–495.

[Lan00] Erasmus Landvogt, *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, J. reine. angew. Math. **518** (2000), 213–241.

[Ly13] Tony Ly, *Représentations modulo p de* $\mathrm{GL}(m, D)$*, D algèbre à division sur un corps local*, Ph.D. thesis, Université Paris Diderot 7, 2013.

[MN43] Yozô Matsushima and Tadasi Nakayama, *Über die multiplikative Gruppe einer p-adischen Divisionalgebra*, Proc. Imp. Acad. **19** (1943), no. 10, 622–628.

[Pas04] Vytautas Paskunas, *Coefficient systems and supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$, Bulletin de la S.M.F., vol. 99, 2004.

[Pie82] Richard Scott Pierce, *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, no. 88, 1982.

[Rei75] Irving Reiner, *Maximal orders*, 1975.

[Ser67] Jean-Pierre Serre, *Local class field theory*, Algebraic number theory (Academic Press London, ed.), 1967.

[Ser77] ———, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque, no. 46, 1977.

[Ser98] ———, *Représentations linéaires des groupes finis*, 1998.

[Vig04] Marie-France Vignéras, *Representations modulo p of the p-adic group* $\mathrm{GL}(2, F)$, Comp. Math. (2004), no. 140, 333–358.

[Vig08] ———, *Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques*, GAFA **17** (2008).

[Vig11] ———, *Représentations p-adiques de torsion admissibles*, Number Theory, Analysis and Geometry : In memory of Serge Lang (Springer, ed.), 2011.