Quaternions, algèbres de Clifford (TD9)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

Soit $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des quaternions d'Hamilton. Un élément $z \in \mathbb{H}$ est appelé *quaternion pur* s'il s'écrit $z = bi + cj + dk$ avec $b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $z \in \mathbb{H}$ est pur si et seulement si on a $z^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$.
- Montrer que tout élément de $\mathbb{H}$ est produit de deux quaternions purs.
- Montrer que tout automorphisme d'anneaux de $\mathbb{H}$ est de la forme $x \mapsto qxq^{-1}$ pour un certain $q \in \mathbb{H}$ de norme 1.
- Remarquer que la transposée $M_2(\mathbb{H}) \rightarrow M_2(\mathbb{H})$ ne préserve pas $\text{GL}_2(\mathbb{H})$.

Exercice 2 (Théorème de Lagrange)

Soient A un anneau unitaire et $H(A)$ la A -algèbre¹ ayant pour éléments les $a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in A$ et dont la multiplication est donnée par le fait que 1 est unité et sa table

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

On rappelle l'existence d'un antiautomorphisme involutif $z = a + bi + cj + dk \mapsto \bar{z} = a - bi - cj - dk$ et d'une *norme réduite* $N : z \mapsto z\bar{z}$.

- Montrer que N est à valeurs dans A et qu'elle est multiplicative.

On définit les *quaternions d'Hurwitz* ensemblistement par

$$H = \left\{ a + bi + cj + dk \in H(\mathbb{Q}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)^4 \right\}.$$

- Montrer que H est un sous-anneau de $H(\mathbb{Q})$ contenant $H(\mathbb{Z})$, et stable par $z \mapsto \bar{z}$.
- Montrer que la restriction de N à H est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et vérifie $N(z) = 1$ si et seulement si z est inversible dans H .
- Montrer que tout idéal à droite (resp. à gauche) de H est principal, c'est-à-dire de la forme zH (resp. $H z$) pour un certain $z \in H$.
- Montrer que pour tout nombre premier p , il existe $z \in H$ vérifiant $N(z) = p$.
- En déduire que tout entier naturel est somme de quatre carrés.

Exercice 3

Soient F un corps de caractéristique différente de 2 et α, β deux éléments de $F^\times$. On définit une F -algèbre de dimension 4 par sa structure de F -espace vectoriel

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right) = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in F\}$$

et sa table de multiplication

$$i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad k^2 = -\alpha\beta, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = -\beta i, \quad ki = -ik = -\alpha j.$$

On définit encore une application $z = a + bi + cj + dk \mapsto \bar{z} = a - bi - cj - dk$ et la norme réduite $N : z \mapsto z\bar{z}$.

¹c'est un anneau unitaire B (non nécessairement commutatif) muni d'un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$ d'image contenue dans le centre de B

- a) Supposons F algébriquement clos. Montrer que $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ est isomorphe à $M_2(F)$.
- b) Montrer que $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ est une algèbre à division si et seulement si N est anisotrope sur le F -espace vectoriel $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$.
- c) Soient $\alpha', \beta' \in F^\times$. Montrer que les F -algèbres $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ et $\left(\frac{\alpha', \beta'}{F}\right)$ sont isomorphes si et seulement si les normes associées N et N' sont isométriques en tant que formes quadratiques.

Exercice 4

Soient F un corps de caractéristique différente de 2 et α, β deux éléments de $F^\times$. Soit q la forme quadratique sur F^2 donnée par $(x, y) \mapsto -\alpha x^2 - \beta y^2$. Montrer que l'algèbre de Clifford $C(q)$ est isomorphe à l'algèbre de quaternions $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$.

Exercice 5

Soit F un corps de caractéristique différente de 2.

- a) Montrer qu'il existe une isométrie entre $\left(\left(\frac{1, 1}{F}\right), N\right)$ et $(M_2(F), \det)$ respectant les structures de F -algèbres.

On définit

$$U = \left\{ (u, v) \in \left(\frac{1, 1}{F}\right)^\times \times \left(\frac{1, 1}{F}\right)^\times \mid N(u) = N(v) \right\}, \quad S: \begin{array}{l} U \rightarrow \text{O}(N) \\ (u, v) \mapsto (x \mapsto u x v^{-1}) \end{array} .$$

- b) Déterminer le noyau de S .
- c) Montrer que le groupe dérivé de U est isomorphe à $\text{SL}_2(F) \times \text{SL}_2(F)$.
- d) Montrer que $\Omega(N)$ est isomorphe à $(\text{SL}_2(F) \times \text{SL}_2(F)) / \{\pm(1, 1)\}$.
- e) En déduire l'isomorphisme $\text{PO}(N) \simeq \text{PSL}_2(F) \times \text{PSL}_2(F)$.

Exercice 6

Soient F un corps de caractéristique différente de 2 et E un F -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E , possédant des vecteurs isotropes.

- a) Rappeler la définition de la norme spinorielle $N: \text{SO}(q) \rightarrow F^\times / F^{\times 2}$.
- b) Supposons $n = 2$. Montrer que le noyau de N est $\Omega(q)$.

Soient P un plan hyperbolique de E et u un élément de $\text{O}(q)$.

- c) Montrer qu'il existe $v \in \text{O}(q)$ tel que $v(P) = P$ et $\omega \in \Omega(q)$ vérifiant $u = v\omega$.
- d) Conclure quant à l'égalité $\text{Ker } N = \Omega(q)$.

Exercice 7

Soient F un corps de caractéristique différente de 2 et E un F -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E . On définit le *groupe de Clifford* par

$$\text{G}(q) = \{x \in \text{C}(q) \mid x \text{ inversible, } xEx^{-1} = E\}.$$

- a) Déterminer les centres respectifs de $\text{C}(q)$ et $\text{C}^+(q)$.
- b) Montrer que l'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow Z(\text{C}(q)) \cap \text{G}(q) \rightarrow \text{G}(q) \rightarrow \tilde{\text{O}}(q) \rightarrow 1,$$

où $\tilde{\text{O}}(q)$ est $\text{O}(q)$ si n est pair, $\text{SO}(q)$ sinon.

On rappelle que $\text{P}(q)$ est le sous-groupe de $\text{C}(q)^\times$ engendré par $\{x \in E \mid q(x) \neq 0\}$.

- c) Supposons n pair. En déduire l'équivalence des définitions $\text{G}(q) = \text{P}(q)$.