Algèbre extérieure (TD8)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1
Soient k un corps et E un espace vectoriel de dimension finie sur k. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que le dual $\left(\bigwedge^n E\right)^*$ de $\bigwedge^n E$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^n E^*$.

Exercice 2
Soient k un corps et E, F deux espaces vectoriels sur k. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'on a une bijection entre les applications linéaires $\bigwedge^n E \to F$ et les applications n-linéaires alternées $E^n \to F$.

Exercice 3
Soient k un corps et E un espace vectoriel sur k. Soient $u_1, \ldots, u_r$ des éléments de E.

a) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est libre dans E.

b) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si il existe une forme r-linéaire alternée f sur E vérifiant $f(u_1, \ldots, u_r) \neq 0$.

Exercice 4
Soient k un corps et E, F deux espaces vectoriels sur k. Soient $n \geq 1$ un entier et $u : E \to F$ une application linéaire.

a) Définir une application linéaire $\bigwedge^n u : \bigwedge^n E \to \bigwedge^n F$.

On appelle $\bigwedge^n u$ la *puissance extérieure n-ème de u*. Supposons u de rang $r < \infty$.

b) Montrer que si $n \leq r$, alors le rang de $\bigwedge^n u$ est C_r^n ; et si $n > r$, alors $\bigwedge^n u$ est identiquement nulle.

Exercice 5
Soient k un corps $n \geq 1$ un entier. Soit u un endomorphisme de k^n (que l'on identifie avec sa matrice dans la base canonique). Pour tout entier $k \in [0, n]$, on note $\mathcal{P}_k(n)$ l'ensemble des parties à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Si $I \in \mathcal{P}_k(n)$, on note $\Delta_I(u)$ le mineur $I \times I$ extrait de u.

a) Montrer l'égalité $\operatorname{Tr}\left(\bigwedge^k u\right) = \sum_{\mathcal{P}_k(n)} \Delta_I(u)$.

b) Montrer que le polynôme caractéristique de u est donné par

$$\det(XI_n - u) = X^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \operatorname{Tr}\left(\bigwedge^k u\right) X^{n-k}.$$

Exercice 6
Soient k un corps et E un espace vectoriel sur k.

a) Supposons E de dimension finie. Montrer que $z = \sum_{n \geq 0} z_n \in \bigoplus_n \bigwedge^n E = \bigwedge E$ est inversible si et seulement si $z_0 \neq 0$.

b) Montrer que tout élément $z \in \bigwedge E$ appartient à un $\bigwedge F$ pour un certain sous-espace $F \subseteq E$ de dimension finie. Conclure.