Groupes classiques (TD7)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et P un espace vectoriel de dimension 2 sur k muni d'une forme quadratique hyperbolique q.

a) Montrer que $\mathrm{SO}(q)$ est isomorphe à $k^\times$.

b) Que dire de $\mathrm{O}(q)$ si k est $\mathbb{F}_3$?

Exercice 2

Soient p un nombre premier impair, $f \geq 1$ et $q = p^f$. On munit le corps $\mathbb{F}_{q^2}$ de l'involution de Frobenius $x \mapsto x^q$. Soit $n \geq 1$ un entier.

a) Rappeler pourquoi toute forme hermitienne non dégénérée sur $\mathbb{F}_{q^2}^n$ est équivalente à la forme

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{q+1} + x_2^{q+1} + \cdots + x_n^{q+1}.$$

Soient z_n et y_n le nombre respectif de vecteurs non triviaux de $\mathbb{F}_{q^2}^n$ de norme 0 et 1.

b) En établissant des formules de récurrence, montrer que l'on a, pour tout $n \geq 1$:

$$z_n = (q^n - (-1)^n)(q^{n-1} + (-1)^n), \quad y_n = q^{n-1}(q^n - (-1)^n).$$

c) Calculer l'ordre de $\mathrm{U}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$.

d) En déduire les ordres de $\mathrm{SU}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSU}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$.

Exercice 3

a) Rappeler l'ordre de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.

b) A partir de l'action naturelle de $\mathfrak{S}_6$ sur $\mathbb{F}_2^6$, construire une action de $\mathfrak{S}_6$ sur un sous-espace E de dimension 5. En déduire une action de $\mathfrak{S}_6$ sur un quotient de dimension 4 de V muni d'une forme bilinéaire alternée.

c) Conclure que $\mathfrak{S}_6$ est isomorphe à $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 4

Soient k un corps, $n \geq 1$ et $A = (a_{ij}) \in M_{2n}(k)$ une matrice antisymétrique.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{Pf}\, A$ en les variables (a_{ij}) (pour $1 \leq i < j \leq 2n$) vérifiant $\det A = (\mathrm{Pf}\, A)^2$ et de coefficient 1 pour le terme $a_{12}a_{34} \cdots a_{2n-1,2n}$.

On appelle ce polynôme le *pfaffien* de A.

b) Montrer que si P est une matrice inversible alors on a $\mathrm{Pf}({}^tPAP) = (\det P)(\mathrm{Pf}\, A)$.

c) En déduire que $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_{2n}(k)$.

Exercice 5

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et $m \geq 3$. Soit $V = k^{2m}$, muni de la forme bilinéaire alternée usuelle b ; on note $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ le groupe correspondant. Soient $s, t \in \mathrm{Sp}_{2m}(k)$ deux involutions.

a) Montrer que l'on peut écrire une décomposition $V = E_+(s) \oplus^\perp E_-(s)$ où $E_+(s)$ et $E_-(s)$ désignent respectivement les espaces propres de s associées aux valeurs propres 1 et -1.

b) En déduire une bijection entre l'ensemble des involutions de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ et l'ensemble des sous-espaces non dégénérés de V.

On dit que l'involution s est de type $(2r, 2m-2r)$ si l'espace $E_+(s)$ est de dimension $2r$. On parle d'*involution extrémale* pour une involution de type $(2, 2m-2)$ ou $(2m-2, 2)$. Dans ce cas-là, on note $E_2(s)$ l'espace $E_\pm(s)$ de dimension 2.

c) En considérant les familles commutatives maximales d'involutions conjuguées dans $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$, montrer que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ envoie une involution extrémale sur une involution extrémale.

On dit que deux involutions extrémales s et t forment un *couple minimal* (s,t) si on a $\dim E_2(s) \cap E_2(t) = 1$. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Sp}_{2m}(k)$ est un ensemble d'involutions extrémales, on note $C(\mathcal{S})$ l'ensemble des involutions extrémales qui commutent à tout élément de $\mathcal{S}$.

d) Montrer que s et t forment un couple minimal si et seulement si ($st \neq ts$ et pour tous $s', t' \in C(C(\{s,t\}))$ avec $s't' \neq t's'$ on a $C(C(\{s,t\})) = C(C(\{s',t'\}))$).

e) Déterminer les ensembles maximaux I d'involutions extrémales tels que toute paire d'éléments de I forme un couple minimal ou commute.

Soit $n \geq 3$. On note $\Gamma\mathrm{L}_n(k)$ le groupe des transformations semi-linéaires de k^n. On admet le théorème fondamental de la géométrie projective, qui est l'énoncé suivant.

Soit $\phi : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ une bijection telle que trois points A_1, A_2, A_3 de $\mathbb{P}^n(k)$ sont alignés si et seulement si $\phi(A_1), \phi(A_2), \phi(A_3)$ le sont. Alors il existe un isomorphisme de corps $\sigma : k \to k$ et une transformation σ-linéaire $\gamma \in \Gamma\mathrm{L}_{n+1}(k)$ telle que ϕ soit induite par γ.

On définit enfin $\Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ le sous-groupe de $\Gamma\mathrm{L}_{2m}(k)$ des éléments préservant la forme b.

f) Déduire que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ est de la forme $x \mapsto axa^{-1}$ pour un certain élément $a \in \Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(k)$.

Exercice 6

Soient p un nombre premier impair, $f \geq 1$ et $q = p^f$. Soit b la forme sur $(\mathbb{F}_{q^2})^3 \times (\mathbb{F}_{q^2})^3$ définie par $b(u,v) = u_1 v_3^q + u_2 v_2^q + u_3 v_1^q$.

a) Déterminer l'ensemble Δ des droites isotropes de b. Quel est le cardinal de Δ ?

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$. On définit aussi les éléments $t_{\alpha,\beta}$ et $h_{\gamma,\delta}$ de $\mathrm{PU}_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ correspondant aux respectivement aux matrices $\begin{pmatrix} 1 & -\beta^q & \alpha \\ & 1 & \beta \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \gamma & & \\ & \delta & \\ & & \gamma^{-q} \end{pmatrix}$ avec les conditions $\delta^{1+q} = 1$, $\gamma \neq 0$, $\alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0$.

b) Déterminer le stabilisateur de ke_1 dans $\mathrm{PU}_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ et montrer que

$$T := \{t_{\alpha,\beta} \mid \alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0\}$$

en est un sous-groupe normal.

c) Montrer que l'action de $\mathrm{PU}_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ sur Δ est 2-transitive.

Exercice 7

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et $n \geq 2$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur k^n. On définit $\Omega(q)$ et $\mathrm{S}\Omega(q)$ comme étant les sous-groupes dérivés respectifs de $\mathrm{O}(q)$ et $\mathrm{SO}(q)$.

a) Montrer que $\Omega(q)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(q)$. Montrer que l'on a $\mathrm{S}\Omega(q) = \Omega(q)$ si $n \geq 3$.

b) Soit u une rotation de $\mathrm{SO}_3(k)$ d'axe kx. Montrer que si x est isotrope, alors u est le carré d'une rotation.

c) En déduire que, pour $n \geq 3$, le centre de $\Omega(q)$ est égal à $Z(\mathrm{O}(q)) \cap \Omega(q)$.

Exercice 8

Soient $m, f \geq 1$ et $q = 2^f$. Dans ce cas, on définit $\mathrm{O}_{2m+1}(\mathbb{F}_q)$ comme le groupe conservant la forme bilinéaire symétrique alternée standard (plutôt que la forme symétrique standard ou une forme quadratique). En examinant la forme bilinéaire alternée naturelle sur $\mathbb{F}_q^{2m+2}$, montrer que $\Omega_{2m+1}(\mathbb{F}_q)$ est isomorphe à $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{F}_q)$.