

CW-complexes et théorème des coefficients universels (Corrigé7)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 1 (Quelques calculs pratiques avec l'homologie cellulaire)

1. L'espace projectif $\mathbb{C}P^n$ possède un complexe cellulaire concentré en les degrés pairs $2i$ pour $0 \leq i \leq n$. On trouve alors

$$H_i(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \text{ si } i = 2k, 0 \leq k \leq n, \quad H_i(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = 0 \text{ sinon.}$$

2. L'union $\mathbb{C}P^\infty$ possède un complexe cellulaire concentré en les degrés pairs $2i$ pour $i \geq 0$. On remarque que l'homologie se calcule à chaque fois sur un sous-CW-complexe fini (et donc à l'aide d'un sous-complexe fini de ce complexe cellulaire) et on trouve :

$$H_{2i}(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_{2i+1}(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour } i \geq 0.$$

3. L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ possède le complexe cellulaire suivant

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

On calcule ainsi

$$H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = 0 \text{ si } i \geq 2 \text{ pair}, \quad H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ si } 0 < i < n \text{ impair},$$

$$H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = 0 \text{ si } n \text{ pair}, \quad H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ impair.}$$

4. Pour $X = S^2/\{x \sim -x \text{ sur l'équateur}\}$, on trouve le complexe cellulaire

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(2,2)} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

et donc l'homologie

$$H_0(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

5. Le parachute P a pour complexe cellulaire

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{t(\pm 1, \pm 1, \pm 1)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

et donc pour homologie

$$H_0(P; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_1(P; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2, \quad H_i(P; \mathbb{Z}) = 0 \text{ si } i > 1.$$

6. Le tore à g trous S_g a pour complexe cellulaire

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

ce qui donne directement l'homologie

$$H_0(S_g; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_1(S_g; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(S_g; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_i(S_g; \mathbb{Z}) = 0 \text{ si } i > 2.$$

Exercice 2 (Homologie cellulaire d'un produit)

On exclut les cas $k = 0$ ou $\ell = 0$, qui sont deux copies d'une sphère et suivent de l'Exercice 3. Le complexe cellulaire de $S^k \times S^\ell$ est alors concentré en les degrés 0, k , ℓ et $k + \ell$, avec des différentielles toutes nulles. On trouve ainsi

$$H_0(S^k \times S^\ell) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_{k+\ell}(S^k \times S^\ell) \simeq \mathbb{Z},$$

$$H_k(S^k \times S^\ell) \simeq H_\ell(S^k \times S^\ell) \simeq \mathbb{Z} \text{ (si } k \neq \ell), \quad H_k(S^k \times S^\ell) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ (si } k = \ell).$$

Pour $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, le complexe cellulaire est de la forme

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_4} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

et il faut déterminer les différentielles. D'abord d_1 est identiquement nulle. Puis d_2 est $(a, b, c) \mapsto (2a, 2c)$. Et d_3 est $(a, b) \mapsto (0, 2a - 2b, 0)$. Enfin, on calcule $d_4(a) = (2a, 2a)$.

Ceci nous permet d'obtenir au final

$$H_0(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$H_2(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_3(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_4(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = 0.$$

Exercice 3 (Homologie cellulaire vs homologie simpliciale)

Le calcul est immédiat en utilisant le complexe cellulaire (concentré en degrés 0 et n)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

et on retrouve $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Influence des coefficients sur l'homologie)

Par l'énoncé du théorème des coefficients universels, comme on a $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}) = 0$ pour tout $\mathbb{Z}$ -module M , il suit l'isomorphisme $H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H_i(X; \mathbb{Q})$. Par le (3) de l'Exercice 1, on sait

$$H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0 \text{ si } i > 1.$$

Ainsi on obtient

$$H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}, \quad H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) = 0 \text{ si } i > 0,$$

et $\mathbb{R}P^2$ a même homologie sur $\mathbb{Q}$ qu'un point.

Quand on considère $\mathbb{F}_2$ comme coefficients, on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Toujours pour le plan projectif réel, on obtient

$$H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$H_2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0 \text{ si } i > 2.$$

Pour $S^1 \vee S^2$, l'homologie sur $\mathbb{Z}$ vaut $\mathbb{Z}$ en degrés 0, 1, 2 et 0 ailleurs. Parce que $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}$ -libre, $S^1 \vee S^2$ a même homologie sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 5 (Coefficients universels)

1. Par théorème des coefficients universels, X a même homologie que S^3 sur $\mathbb{Q}$.
Pour tout premier p , on utilise la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

On trouve alors, d'abord si p divise n :

$$H_i(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ si } 0 \leq i \leq 3, \quad H_i(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0 \text{ si } i > 3.$$

Puis, lorsque p ne divise pas n :

$$H_i(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ si } i = 0, 3, \quad H_i(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0 \text{ si } i = 1, 2 \text{ ou } i > 3.$$

2. Chaque facteur libre $\mathbb{Z}$ en homologie entière donne un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur la même dimension pour l'homologie à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Chaque facteur du type $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ en $H_i(X, \mathbb{Z})$ donne un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur H_i et H_{i+1} à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et les autres facteurs p -primaires avec $p \neq 2$ ne contribuent pas pour l'homologie à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc on peut les placer arbitrairement (mais en nombre fini puisque X est un CW-complexe fini).

Exercice 6 (Espaces à homologie prescrite)

Il s'agit de construire, pour chaque $i \geq 1$, un espace X_i connexe par arcs dont le seul groupe d'homologie réduite non nul est $H_i(X_i, \mathbb{Z}) \simeq A_i$. En effet, les X_i construits posséderont des points « à voisinage raisonnable » et on considérera alors $X = \bigvee_i X_i$ pour répondre au problème. Pour chaque groupe abélien A_i , on choisit une résolution :

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f} F_0 \rightarrow A_i \rightarrow 0,$$

où F_0 et F_1 sont deux groupes abéliens libres : $F_0 = \bigoplus_{k \in K} \mathbb{Z}$ et $F_1 = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}$. Alors on prend d'abord $W_i = \bigvee_{k \in K} S^i$, et puis on lui attache, pour chaque $j \in J$, une cellule de dimension $i + 1$ via l'application d'attachement donnée par f : on note X_i l'espace obtenu. En utilisant l'Exercice 10 ci-dessous (voire une variante si J n'est pas de type fini), on obtient

$$0 \rightarrow H_{i+1}(X_i) \rightarrow H_i\left(\bigvee_{j \in J} S^i\right) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(W_i) \simeq \bigoplus_{k \in K} \mathbb{Z} \rightarrow H_i(X_i) \rightarrow 0$$

et le résultat voulu.

Exercice 7 (Caractéristique d'Euler et application aux triangulations)

1. Voir Exercice 3 du TD5.
2. On a $\chi(T) = 1 - 2 + 1 = 0$ par la question 1. Et $2015 - 5987 + 3678 = -294 \neq 0$ interdit donc une telle triangulation du tore.
3. Les valeurs de (p, q) possibles sont $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$ et $(3, 5)$: on retrouve bien les solides de Platon (respectivement tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre).

Exercice 8 (Structures cellulaires et revêtements)

Avec les notations de l'Exercice 7, on a $n_i(E) = n n_i(X)$ pour tout i , et donc $\chi(E) = n \chi(X)$.

Exercice 9 (Fonctorialité du complexe cellulaire)

Exercice 10 (Attachement d'une cellule à un espace quelconque)

On remarque que l'on a $H_i(S^{n-1}) = 0$ sauf pour $i = 0, n-1$ et $H_i(D^n) = 0$ sauf pour $i = 0$. De ce fait, pour $i \neq 0, n-1, n$, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris donne directement $H_i(X) \xrightarrow{\sim} H_i(Y)$. Pour $i = 0$ (et on suppose aussi $n > 1$, dans le cas contraire, cela sera traité dans le cas suivant), on a la suite exacte courte

$$H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(X) \oplus H_0(D^n) \rightarrow H_0(Y) \rightarrow 0.$$

La seconde flèche y est $(x, d) \mapsto x + d$, ce qui donne l'isomorphisme $H_0(X) \xrightarrow{\sim} H_0(Y)$ également. Enfin, en $i = n-1, n$, on réutilise la suite exacte longue de Mayer-Vietoris (en remarquant $H_n(D^n) = H_{n-1}(D^n) = 0$).

Exercice 11 (Homologie simpliciale vs homologie singulière)

1.2.

3. On rajoute successivement des $(\ell + 1)$ -simplexes grâce au diagramme suivant, où on a $K_\ell \subseteq X \subsetneq K_{\ell+1}$ et $Y = X \cup \Delta^{\ell+1}$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*^{\text{simp}}(X)/C_*^{\text{simp}}(K_\ell) & \longrightarrow & C_*^{\text{simp}}(Y)/C_*^{\text{simp}}(K_\ell) & \longrightarrow & C_*^{\text{simp}}(Y)/C_*^{\text{simp}}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_*(|X|)/C_*(|K_\ell|) & \longrightarrow & C_*(|Y|)/C_*(|K_\ell|) & \longrightarrow & C_*(|Y|)/C_*(|X|) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La colonne de gauche est un quasi-isomorphisme (c'est-à-dire qu'elle induit un isomorphisme en homologie) par hypothèse de récurrence, et celle de droite par la question 2. Celle du milieu l'est alors aussi (par lemme des cinq), ce qui nous permet de mener à bien une récurrence, et obtenir au final

$$H_i(C_*^{\text{simp}}(K_{\ell+1})/C_*^{\text{simp}}(K_\ell)) \xrightarrow{\sim} H_i(|K_{\ell+1}|, |K_\ell|).$$

4. On effectue maintenant une récurrence sur ℓ à l'aide du diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*^{\text{simp}}(K_\ell) & \longrightarrow & C_*^{\text{simp}}(K_{\ell+1}) & \longrightarrow & C_*^{\text{simp}}(K_{\ell+1})/C_*^{\text{simp}}(K_\ell) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_*(|K_\ell|) & \longrightarrow & C_*(|K_{\ell+1}|) & \longrightarrow & C_*(|K_{\ell+1}|)/C_*(|K_\ell|) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La colonne de gauche est un quasi-isomorphisme par hypothèse de récurrence et celle de droite par la question 3. Celle du milieu l'est donc aussi.

Exercice 12 (Une caractérisation des CW-complexes contractiles)

Par lemme de Zorn, on peut prendre un CW-complexe contractile maximal Y parmi les sous-CW-complexes de X . Supposons Y distinct de X : il existe une cellule e_n de dimension n minimale qui n'est pas dans Y . On remarque que la minimalité implique $Y_{n-1} = X_{n-1}$. On note alors $\tilde{Y}$ le sous-complexe de X engendré par Y et e_n , et on va voir que $\tilde{Y}$ est contractile. Pour cela, on construit directement une homotopie vers l'application constante sur un point $y \in Y$ fixé comme suit. La cellule e_n (avec son application d'attachement) correspond à une application $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, Y)$. Parce que Y est contractile, cette dernière est homotope à une application $\delta_n : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, y)$. Enfin, comme $\pi_n(X, y)$ est trivial, δ_n est homotope à l'application constante d'image y . Ainsi $\tilde{Y}$ est contractile. Cela contredit la maximalité de Y , et on conclut $Y = X$: X est contractile.