

TD : feuille n°7

CW-complexes et théorème des coefficients universels.

Les exercices marqués du symbole ☛ sont des exercices à faire en priorité.

☛ Exercice 1. Quelques calculs pratiques avec l'homologie cellulaire

Calculer l'homologie à coefficients $\mathbb{Z}$ des espaces suivants en utilisant une décomposition cellulaire.

1. $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 1$.
2. L'espace $\mathbb{CP}^\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{CP}^n$, muni de la topologie où $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{CP}^\infty$ si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{U} \cap \mathbb{CP}^n$ est un ouvert de $\mathbb{CP}^n$.
3. $\mathbb{RP}^n$.
4. le quotient de S^2 obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur.
5. Le parachute obtenu à partir du triangle plein Δ^2 en identifiant ses trois sommets.
6. Le tore à g trous S_g .

Exercice 2. Homologie cellulaire d'un produit

Calculez l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $S^k \times S^\ell$ et de $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ en utilisant une décomposition cellulaire.

Exercice 3. Homologie cellulaire vs homologie simpliciale.

Donnez une triangulation de la sphère S^n et calculez l'homologie simpliciale associée. Comparez avec le complexe cellulaire donné par la décomposition de la sphère en deux cellules (une en dimension 0, une en dimension n).

☛ Exercice 4. Influence des coefficients sur l'homologie

Trouvez deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De même trouvez deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

☛ Exercice 5. Coefficients universels

1. Soit X un espace tel que

$$H_i(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \text{ ou } i = 3 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculez l'homologie de X à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour tout nombre premier p .

2. Soit X un CW-complexe fini tel que $H_i(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Donnez les possibilités pour l'homologie de X à coefficients entiers.

Exercice 6. Espaces à homologie prescrite

Soient $(A_i)_{i \geq 1}$ des groupes abéliens. Construisez un espace topologique connexe par arcs X tel que $H_i(X, \mathbb{Z}) = A_i$ pour tout i .

☛ Exercice 7. Caractéristique d'Euler et application aux triangulations

La caractéristique d'Euler $\chi(X)$ d'un CW-complexe fini X est la somme alternée $\sum (-1)^i n_i$ où n_i est le nombre de cellules de dimension i .

1. Montrez que si $\mathbb{k}$ est un corps, $\chi(X) = \sum (-1)^i \dim H_i(X; \mathbb{k})$.
2. Peut-on trianguler le tore avec une triangulation comportant 3678 faces, 5987 arêtes, et 2015 sommets ?
3. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ un polyèdre régulier possédant s sommets, a arêtes, f faces, et dont toutes les faces ont p cotés et chaque sommet appartient à q faces. Montrez les égalités : $s + f - a = 2$, $qs = 2a$, $pf = 2a$. En déduire que $1/p + 1/q > 1/2$, puis faire la liste des couples p, q possibles.

Exercice 8. Structures cellulaires et revêtements

Soit X un CW-complexe fini, et $p : E \rightarrow X$ un revêtement à n feuillets. Montrez que E possède une structure de CW complexe dont on donnera le nombre de cellules de chaque dimension. Comparez $\chi(X)$ et $\chi(E)$.

Exercice 9. Functorialité du complexe cellulaire

Une application cellulaire entre deux CW-complexes X et Y est une application continue $f : X \rightarrow Y$ qui préserve les squelettes : $f(X_n) \subset Y_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrez qu'une application cellulaire induit un morphisme $f_*^{\text{cell}} : C_*^{\text{cell}}(X) \rightarrow C_*^{\text{cell}}(Y)$ entre les complexes cellulaires, et montrez que l'application induite en homologie par f_*^{cell} s'identifie à l'application induite en homologie singulière par f .

Exercice 10. Attachement d'une cellule à un espace quelconque

Soit X un espace et $Y := X \cup_f D^n$ l'espace obtenu en rattachant une cellule de dimension n à X au moyen de $f : S^{n-1} \rightarrow X$. Montrez que l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme $H_i(X) \simeq H_i(Y)$ si $i \neq n, n-1$, et qu'on a une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow 0.$$

Exercice 11. Homologie simpliciale versus homologie singulière

Soit K un complexe simplicial géométrique de $\mathbb{R}^n$. On note K_ℓ son ℓ squelette, c'est à dire le sous-complexe simplicial géométrique formé des simplexes de K de dimension inférieure ou égale à ℓ .

1. Montrez qu'on peut réaliser le complexe $C_*^{\text{simpl}}(K)$ comme un sous-complexe du complexe $C_*(|K|)$ des chaînes singulières de $|K|$:

$$C_*^{\text{simpl}}(K) \hookrightarrow C_*(|K|) \quad (*) .$$

2. Soit $\Delta^m \subset \mathbb{R}^m$ le simplexe standard. Montrez par récurrence sur m que l'application identité $\text{Id} : \Delta^m \rightarrow \Delta^m$ fournit un générateur de l'homologie singulière $H_m(\Delta_m, \partial\Delta^m)$.
3. Montrez que l'inclusion $K_\ell \subset K_{\ell+1}$ induit pour tout ℓ des isomorphismes $H_i(C_*^{\text{simpl}}(K_{\ell+1})/C_*^{\text{simpl}}(K_\ell)) \xrightarrow{\simeq} H_i(|K_{\ell+1}|, |K_\ell|)$.
4. En déduire que l'inclusion $C_*^{\text{simpl}}(K) \hookrightarrow C_*(|K|)$ induit un isomorphisme en homologie.

Exercice 12. une caractérisation des CW-complexes contractiles

Soit X un CW-complexe connexe par arcs. On suppose que les groupes d'homotopie de X sont tous triviaux. Montrez que X est contractile. Remarque : en particulier, d'après le théorème de Hurewicz, si X est un CW-complexe simplement connexe, alors X est contractile si et seulement si tous ses groupes d'homologie réduite sont nuls.