

Homologie singulière (Corrigé6.2)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 12 (Calcul du degré)

1. Si f n'est pas surjectif, alors f se factorise par l'espace contractile $S^n \setminus \{x\}$ pour un certain $x \in S^n \setminus \text{Im}(f)$. Et $H_n(f)$ se factorise donc par 0 : le degré de f est nul.

On peut fabriquer un contre-exemple à la réciproque de la manière suivante : on envoie la sphère vers un bouquet de deux sphères en écrasant l'équateur en un point ; puis on envoie une sphère identiquement sur la sphère au but et l'autre sphère sur le but avec degré -1 (par exemple, en inversant une coordonnée).

Supposons $f : S^n \rightarrow S^n$ injective. Voyons d'abord que f est un homéomorphisme. Par le théorème d'invariance du domaine, l'image de f est ouverte. Or par compacité de S^n , l'image de f est aussi fermée : par connexité de S^n , f est surjective. Par compacité et séparation de S^n , f est alors un homéomorphisme. Comme le degré est multiplicatif, on a donc $\deg(f) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

Un contre-exemple à la réciproque peut être construit par la même méthode que ci-dessus.

2. On note μ_k l'ensemble des racines k -èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, vu comme sous-espace de S^1 (et non comme un groupe!). Le quotient S^1/μ_k est homéomorphe à un bouquet de k cercles via accélération du parcours de k fois (ie. via $m_k : z \mapsto z^k$). L'application m_k induit alors en homologie

$$\begin{array}{ccccc} H_1(S^1) & \rightarrow & H_1(S^1/\mu_k) \simeq H_1(S^1)^{\oplus k} & \rightarrow & H_1(S^1) \\ a & \mapsto & (a, \dots, a) & \mapsto & ka \end{array}.$$

Donc m_k est de degré k .

De plus, $\text{inv} : z \mapsto 1/z$ est une réflexion par rapport à l'axe horizontal : elle est de degré -1 . Ainsi, $\text{inv} \circ m_k$ est de degré $-k$ comme voulu.

- +. On peut voir que cela coïncide avec la notion de degré définie par le groupe fondamental pour $n = 1$. En effet, cela découle du diagramme commutatif suivant, à l'aide de l'isomorphisme de Hurewicz h .

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, s) & \xrightarrow{\sim} h & H_1(S^1) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \pi_1(S^1, s) & \xrightarrow{\sim} h & H_1(S^1) \end{array}$$

3. On sait que le degré d'une réflexion orthogonale vaut -1 . Chaque élément $A \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ s'écrit comme une composition de $r \geq 0$ réflexions, et $\det(A)$ est égal à $(-1)^r$. La même formule vaut pour le degré.
4. L'affirmation sur le degré de Σf est une conséquence immédiate du fait que la suite exacte longue de Mayer-Vietoris (resp. d'une paire) est naturelle (voir Exercice 5), c'est-à-dire commute aux morphismes induits par f .

De ce fait, par une récurrence immédiate (on observe $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$), pour obtenir une surjection $\pi_n(S^n, s) \rightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z})$, il suffit de construire une application de tout degré $k \in \mathbb{Z}$ pour S^1 , ce qui est établi à la question 2.

Exercice 13 (Applications du degré)

1. (a) On peut construire explicitement une homotopie :

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + t(-x)}{\|(1-t)f(x) + t(-x)\|}.$$

- 1.(b) On suppose par l'absurde que f n'admet pas de point fixe et que l'on a $f(x) \neq -x$ pour tout $x \in S^{2n}$. Alors, par la question 1.(a), f est homotope à l'antipode, donc de degré $(-1)^{2n+1} = -1$. Or si on note ι l'application antipode, alors $f \circ \iota$ n'a pas de point fixe par hypothèse. On utilise de nouveau 1.(a) pour obtenir que $f \circ \iota$ est homotope à ι , c'est-à-dire que f est homotope à id , donc $\deg(f) = 1$. C'est là une contradiction.
2. Soit $g \in G$. Par 1.(b), g ou $g \circ \iota$ admet un point fixe. Par liberté de l'action, on a alors $g = \text{id}$ ou $g \circ \iota = \text{id}$ (ie. $g = \iota$). De ce fait, G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- 3.(a) On suppose la sphère S^{2n-1} donnée dans $\mathbb{R}^{2n}$ par l'équation $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 = 1$. Alors un champ de vecteurs tangents qui ne s'annule nulle part peut être

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \rightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1, \dots, x_{2n}) & \mapsto & (-x_2, x_1, -x_3, x_4, \dots, -x_{2n-1}, x_{2n}) \end{array}.$$

- 3.(b) Supposons l'existence d'un champ de vecteurs tangents $\begin{array}{ccc} S^{2n} & \rightarrow & \mathbb{R}^{2n+1} \\ x & \mapsto & v_x \end{array}$ qui ne s'annule nulle part sur S^{2n} . On considère alors $\begin{array}{ccc} f : S^{2n} & \rightarrow & S^{2n} \\ x & \mapsto & v_x / \|v_x\| \end{array}$: x est orthogonal à $f(x)$ pour tout x . On remarque alors que f et $f \circ \iota$ n'ont pas de point fixe. Par le résultat de 1.(a), on a $f \sim \iota$ et $f \circ \iota \sim \iota$. Un calcul de degré nous fournit une contradiction.

Exercice 14 (Applications du théorème de Brouwer)

1. Si $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ n'a pas de point fixe, la question 1.(a) de l'Exercice 13 implique que f est homotope à l'application antipode. On a donc $\deg(f) = (-1)^n$ par la question 3 de l'Exercice 12. Or si f est homotopiquement triviale (ie. f homotope à une application constante), alors $\deg(f)$ est nul. Cela contredit le point précédent, et donc f possède un point fixe.
2. On définit

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ pour tout } i, x_1 + \dots + x_n = 1\}.$$

Alors Δ est homéomorphe au disque D^{n-1} . On considère $f : \Delta \rightarrow \Delta$ définie par $x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$. Le théorème de Brouwer nous fournit alors un point fixe de f dans Δ , qui est un vecteur propre à coordonnées positives comme voulu.

3. On prend $\phi : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ comme dans l'énoncé ; c'est une application continue. Comme $[0, 1]^n$ est homéomorphe au disque de dimension n , par le théorème de Brouwer, ϕ possède un point fixe. Ainsi $F = \{x \in [0, 1]^n \mid \phi(x) = x\}$ est non vide. Une petite discussion sur les valeurs de $a \mapsto \bar{a}$ montre qu'un point de $\partial F \cap \partial(F^c)$ est un point où f s'annule.

Exercice 15 (Transfert)

1. D'abord, on prend un recouvrement $\mathcal{U}$ de B par des voisinages ouverts trivialisants, et on note $\mathcal{V}$ le recouvrement correspondant de E (le tiré en arrière de $\mathcal{U}$ par p). On a donc une suite exacte courte des complexes de chaînes $\mathcal{U}$ -petites et $\mathcal{V}$ -petites :

$$0 \rightarrow C_*^{\mathcal{U}}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{t} C_*^{\mathcal{V}}(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} C_*^{\mathcal{U}}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue associée est exactement ce que l'on cherche (en appliquant le théorème d'isomorphisme des chaînes petites).

2. On va appliquer la question 1 au revêtement $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. On casse alors la suite exacte longue en suites exactes courtes. En comprenant $H_i(t)$ à chaque cran, on obtient : $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $0 \leq i \leq n$ et $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ pour $i \geq n+1$.

Exercice 16 (Théorème de Borsuk-Ulam)

- 1.(a) Soit $\mathcal{U}_2$ un recouvrement de $\mathbb{R}P^n$ par des ouverts trivialisants tel que son tiré en arrière $\mathcal{U}_1$ par $\bar{f}$ est aussi un recouvrement par des ouverts trivialisants de $\mathbb{R}P^m$. On note respectivement $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_1$ les recouvrements correspondants sur S^n et S^m . Alors, f et $\bar{f}$ induisent des morphismes de suites exactes courtes de complexes de chaînes $(\mathcal{U}_i/\mathcal{V}_i)$ -petites.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}_1}(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{t} & C_*^{\mathcal{V}_1}(S^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{p_*} & C_*^{\mathcal{U}_1}(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ 0 & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}_2}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{t} & C_*^{\mathcal{V}_2}(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{p_*} & C_*^{\mathcal{U}_2}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

On prend alors les suites exactes longues associées et les morphismes induits par f_* et $\bar{f}_*$ entre elles.

- 1.(b) Dans le diagramme commutatif des deux suites exactes longues de transfert, il y a les sous-diagrammes suivants pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & H_i(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow H_{i+1}(\bar{f}_*) & & \downarrow H_i(\bar{f}_*) & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $H_0(\bar{f}_*) : H_0(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un isomorphisme, par récurrence, les $H_i(\bar{f}_*) : H_i(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont des isomorphismes pour tout $0 \leq i \leq n$.

Or, dans le diagramme commutatif des deux suites exactes longues de transfert, on trouve aussi le carré commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & H_n(S^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0 \\ \sim \downarrow H_n(\bar{f}_*) & & \downarrow H_n(f_*) \\ H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

Mais ce n'est pas possible parce que l'un des deux chemins nous donne un isomorphisme et l'autre nous donne 0.

2. On suppose par l'absurde que l'on a $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in S^n$. On considère l'application continue $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ définie par $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$. Par construction, g vérifie $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in S^n$. La question 1 nous permet de conclure.

Exercice 17 (Applications du théorème de Borsuk-Ulam)

- Il suffit d'appliquer le théorème de Borsuk-Ulam à $f = (f_1, \dots, f_n) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, où chaque coordonnée est définie par la distance à A_i : $f_i(x) = d(x, A_i)$.
- Les hyperplans orientés de $\mathbb{R}^n$ sont paramétrés par la sphère S^n : il suffit de leur associer leur vecteur normal unité, avec l'orientation convenue (l'application réciproque consiste à prendre l'hyperplan orthogonal). On note, pour tout $x \in S^n$, $x^\perp_+$ le demi-espace positif découpé par l'hyperplan $x^\perp$.

On remarque que $(-x)^\perp_+$ est le demi-espace négatif découpé par $x^\perp$. On considère alors $f = (f_1, \dots, f_n) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, où chaque coordonnée $f_i(x)$ est la mesure de Lebesgue de $A_i \cap x^\perp_+$. Le théorème de Borsuk-Ulam nous fournit l'hyperplan $x^\perp$ désiré.