

Homologie singulière (Corrigé6.1)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 1 (Suite exacte longue d'un triplet)

C'est la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de complexes suivante :

$$0 \rightarrow C_*(B; R)/C_*(A; R) \rightarrow C_*(X; R)/C_*(A; R) \rightarrow C_*(X; R)/C_*(B; R) \rightarrow 0.$$

Exercice 2 (Suite de Mayer-Vietoris relative)

1. Il est clair que les colonnes sont exactes et que le diagramme est commutatif. Les première et deuxième lignes sont exactes par construction, et donc la troisième est aussi exacte grâce au lemme des neuf.
2. C'est exactement la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la troisième ligne dans le diagramme précédent, écrite en utilisant le théorème d'isomorphisme des chaînes $\mathcal{U}$ -petites.

Exercice 3 (Homologie du parachute)

Recoller les trois sommets de Δ^2 est homotopiquement équivalent à rajouter des segments entre chacun de ces sommets et un autre hors du parachute (l'attache du parachutiste). On peut ensuite rétracter Δ^2 sur un point et voir que le parachute, que l'on notera P , est homotope à un bouquet de deux cercles.

On a donc $H_0(P; R) \simeq R$, $H_1(P; R) \simeq R^2$ et $H_n(P; R) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4 (Tore et bouquets de sphères)

On peut calculer les groupes d'homologie de T^2 grâce à la suite exacte longue de Mayer-Vietoris (avec A la partie supérieure du tore, et B sa partie inférieure). Quant aux groupes d'homologie de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$, on utilise l'isomorphisme pour les bouquets sur l'homologie réduite. Dans les deux cas, le résultat est le même : on a $H_0 \simeq R$, $H_1 \simeq R^2$, $H_2 \simeq R$ et $H_n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

Pourtant, T^2 et $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ ne sont pas homotopiquement équivalents puisque que leur groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes : on a $\pi_1(T^2, t) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^2, s) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Exercice 5 (Suspensions)

Le cône de X est contractile (TD1, Exercice 14), donc il a homologie réduite triviale.

Par la suite exacte longue d'une paire (pour l'homologie réduite), on obtient $H_0(CX, X \times \{0\}) = 0$ et $H_n(CX, X \times \{0\}) \xrightarrow{\sim} \overline{H}_{n-1}(X)$ pour tout $n \geq 1$. Comme $X \times \{0\} \hookrightarrow CX$ est une cofibration, on sait de plus l'isomorphisme $H_n(CX, X \times \{0\}) \xrightarrow{\sim} \overline{H}_n(\Sigma X)$ pour tout n , ce qui permet de conclure.

Exercice 6 (Homologie de la bouteille de Klein)

On peut utiliser la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en recouvrant la bouteille de Klein K par deux rubans de Moebius M_1 et M_2 (TD2, Exercice 11). Le ruban de Moebius est homotope à un cercle S^1 , et on fera attention que l'inclusion $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$ induit l'inclusion de $2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ au niveau des H_1 .

Au final, on obtient $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_n(K) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

On fera attention que pour un anneau de coefficients R général (qui peut posséder de la 2-torsion), on trouve $H_0(K; R) \simeq R$, $H_1(K; R) \simeq R \oplus R/2R$, $H_2(K; R) \simeq R[2]$ et $H_n(K; R) = 0$ pour tout $n \geq 3$.

Exercice 7 (Homologie de quelques espaces 'pathologiques')

1. Par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, on calcule par récurrence sur $n \geq 1$ les groupes d'homologie de la droite $\mathbb{R}_{(n)}$ à n origines : $H_0(\mathbb{R}_{(n)}; R) \simeq R$, $H_1(\mathbb{R}_{(n)}; R) \simeq R^{\oplus(n-1)}$ et $H_i(\mathbb{R}_{(n)}; R) = 0$ pour tout $i \geq 2$.
2. L'adhérence X de $\sin(1/x)$, $x > 0$ a deux composantes connexes par arcs, disons C et S , toutes deux contractiles. Comme l'homologie est somme directe des homologies de C et de S en tout degré, on obtient $H_0(X; R) \simeq R^2$ et $H_n(X; R) = 0$ pour $n \geq 1$.

Exercice 8 (Homologie du tore à g trous)

1. La sphère trouée $X_g = S^2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{2g} D_i^2$ est homotope à un bouquet de $2g - 1$ cercles. On obtient alors $H_0(X_g; R) \simeq R$, $H_1(X_g; R) \simeq R^{2g-1}$ et $H_i(X_g; R) = 0$ pour tout $i \geq 2$.
L'application $R^{2g} \rightarrow R$ induite au niveau des H_0 par l'inclusion $\bigsqcup_{i=1}^{2g} S_i^1 \hookrightarrow X_g$ est $(a_i)_i \mapsto \sum_i a_i$.
L'application induite en H_1 est $R^{2g} \rightarrow R^{2g-1}$, qui envoie l'élément de base e_i vers e_i pour $i < 2g$, et envoie e_{2g} vers $-\sum_{i=1}^{2g-1} e_i$.
2. On peut voir la surface S_g de genre g comme X_g avec les $2g$ cercles recollés en paire à l'aide de g cylindres (chacun homotope à S^1). En utilisant la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, on trouve alors $H_0(S_g; R) \simeq R$, $H_1(S_g; R) \simeq R^{2g}$, $H_2(S_g; R) \simeq R$ et $H_i(S_g; R) = 0$ pour tout $i \geq 3$.

Exercice 9 (Homologie du tore à g trous, bis)

1. On suppose $n \geq 1$. Enlever un point dans S_g correspond à enlever la 2-cellule dans la construction par recollement de S_g (voir cours au niveau des calculs de π_1). De plus, chaque trou supplémentaire correspond à rajouter une diagonale, donc un cercle au bouquet au final.
Alors $S_g \setminus X$ est homotope à un bouquet de $(2g+n-1)$ cercles, et on a donc $H_0(S_g \setminus X; R) \simeq R$, $H_1(S_g \setminus X; R) \simeq R^{2g+n-1}$ et $H_i(S_g \setminus X; R) = 0$ pour tout $i \geq 2$.
2. On observe que le quotient S_g/Y est homotope à $S_g \vee \bigvee^{m-1} S^1$. En utilisant l'isomorphisme sur les homologies réduites d'un bouquet, on obtient $H_0(S_g/Y; R) \simeq R$, $H_1(S_g/Y; R) \simeq R^{2g+m-1}$, $H_2(S_g/Y; R) \simeq R$ et $H_i(S_g/Y; R) = 0$ pour tout $i \geq 3$.
3. On suppose $n \geq 1$ et $m \geq 2$, les cas complémentaires étant traités par les questions précédentes. Alors $(S_g \setminus X)/Y$ est homotope à un bouquet de $(2g+n+m-2)$ cercles.
D'où les groupes d'homologie : $H_0((S_g \setminus X)/Y; R) \simeq R$, $H_1((S_g \setminus X)/Y; R) \simeq R^{2g+m+n-2}$ et $H_i((S_g \setminus X)/Y; R) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Exercice 10 (H -coespaces)

1. On a un homéomorphisme $X \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 2]$ que l'on compose avec la projection $X \times [0, 2] \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ (en écrasant $X \times 0$, $X \times 1$ et $X \times 2$ en trois points distincts). En passant cette composée au quotient, on obtient l'application δ recherchée.
2. On remarque que

$$\overline{H}_n(\delta) : \overline{H}_n(X) \rightarrow \overline{H}_n(X \vee X) \xrightarrow{\sim} \overline{H}_n(X) \oplus \overline{H}_n(X)$$

est donné par l'identité sur chaque facteur (car on a $p_i \circ \delta = \text{id}_X$, et par fonctorialité de l'homologie). Ensuite

$$\overline{H}_n(f \vee g) : \overline{H}_n(X) \oplus \overline{H}_n(X) \xrightarrow{\sim} \overline{H}_n(X \vee X) \rightarrow \overline{H}_n(X \vee X) \xrightarrow{\sim} \overline{H}_n(X) \oplus \overline{H}_n(X)$$

est donné par la matrice diagonale $(\overline{H}_n(f), \overline{H}_n(g))$. Enfin,

$$\overline{H}_n(p) : \overline{H}_n(X) \oplus \overline{H}_n(X) \xrightarrow{\sim} \overline{H}_n(X \vee X) \rightarrow \overline{H}_n(X)$$

est la somme des cycles.

Exercice 11 (Produit et smash produit par une sphère)

1. On prouve par récurrence sur $n \geq 0$ que l'on a

$$H_i(X \times S^n; R) \simeq H_i(X; R) \oplus H_{i-n}(X; R) \quad \text{pour tout } i,$$

où $H_i(X \times S^n; R) \rightarrow H_i(X; R)$ est induite par la projection canonique.

Le cas $n = 0$ est facile. Pour propager la récurrence on utilise la décomposition (TD1, Exercice 13)

$$S^n = D^n \times S^0 \bigcup_{S^{n-1} \times S^0} S^{n-1} \times D^1$$

et on écrit la suite exacte de Mayer-Vietoris associée :

$$H_i(X \times S^{n-1})^{\oplus 2} \xrightarrow{\eta_i} H_i(X)^{\oplus 2} \oplus H_i(X \times S^{n-1}) \rightarrow H_i(X \times S^n) \rightarrow H_{i-1}(X \times S^{n-1})^{\oplus 2} \xrightarrow{\eta_{i-1}} H_{i-1}(X)^{\oplus 2} \oplus H_{i-1}(X \times S^{n-1}).$$

On en déduit la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Coker } \eta_i \rightarrow H_i(X \times S^n) \rightarrow \text{Ker } \eta_{i-1} \rightarrow 0.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, cette dernière devient :

$$0 \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X \times S^n) \rightarrow H_{i-n}(X) \rightarrow 0. \quad (1)$$

De plus, la projection canonique fournit une rétraction à $H_i(X) \rightarrow H_i(X \times S^n)$, de sorte que (1) est scindée.

+. On pourrait conclure plus rapidement par la formule de Künneth : $H_*(X \times S^n; R)$ est isomorphe à $H_*(X; R) \otimes_R H_*(S^n; R)$ en tant que R -algèbre graduée. Or $H_*(S^n; R)$ vaut R en degré 0 et n , est nul en tout autre degré. Par conséquent, on a directement

$$H_i(X \times S^n; R) \simeq H_i(X; R) \oplus H_{i-n}(X; R).$$

2. Comme l'homologie des sphères S^n fournit des R -modules libres, la liberté des R -modules $H_i((S^n)^{\times k}; R)$ suit de la question 1. Notons $r_n(i, k)$ le rang de $H_i((S^n)^{\times k}; R)$.

Comme l'homologie de la sphère S^n est concentrée en degrés 0 et n , $r_n(i, k)$ est nul pour tout i non divisible par n . De plus, la question 1 fournit la formule

$$r_n(ni, k) = r_n(ni, k-1) + r_n(n(i-1), k-1),$$

grâce à laquelle on montre facilement par récurrence l'égalité $r_n(ni, k) = C_k^i$.

3. En utilisant la suite exacte longue d'une paire pour l'homologie réduite, grâce à la question 1, on obtient

$$\overline{H}_{i-d}(X; R) \xrightarrow{\sim} H_i(S^d \times X, S^d \vee X; R) \quad \text{pour tout } i.$$

Reste à observer que $S^d \vee X \hookrightarrow S^d \times X$ est une cofibration pour avoir

$$H_i(S^d \times X, S^d \vee X; R) \simeq \overline{H}_i(S^d \wedge X; R)$$

et conclure.