TD : feuille n°6

Homologie singulière

Les exercices marqués du symbole 🍷 sont des exercices à faire en priorité.

1 Deux outils théoriques

🍷Exercice 1. Suite exacte longue d'un triplet

Soient $A \subset B \subset X$ des inclusions d'espaces topologiques. Montrez qu'il existe une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H_i(B, A; R) \rightarrow H_i(X, A; R) \rightarrow H_i(X, B; R) \rightarrow H_{i-1}(B, A; R) \rightarrow \dots$$

Exercice 2. Suite de Mayer-Vietoris relative

Soit X un espace topologique, et A, B deux ouverts de X . Notons $\mathcal{U} = \{A, B\}$ le recouvrement correspondant de $A \cup B \subset X$ et $C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B; R)$ le complexe des chaînes $\mathcal{U}$ -petites associé.

1. Montrez qu'on a un diagramme commutatif de complexes, dont les lignes et les colonnes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_*(A \cap B; R) & \longrightarrow & C_*(A; R) \oplus C_*(B; R) & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B; R) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_*(X; R) & \longrightarrow & C_*(X; R) \oplus C_*(X; R) & \longrightarrow & C_*(X; R) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \frac{C_*(X; R)}{C_*(A \cap B; R)} & \longrightarrow & \frac{C_*(X; R)}{C_*(A; R)} \oplus \frac{C_*(X; R)}{C_*(B; R)} & \longrightarrow & \frac{C_*(X; R)}{C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B; R)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

2. Montrez qu'on a une suite exacte longue en homologie :

$$\dots \rightarrow H_i(X, A \cap B; R) \rightarrow H_i(X, A; R) \oplus H_i(X, B; R) \rightarrow H_i(X, A \cup B; R) \rightarrow H_{i-1}(X, A \cap B; R) \rightarrow \dots$$

2 Quelques calculs pratiques

Exercice 3. Homologie du parachute

Calculez l'homologie du 'parachute' obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2 .

🍷Exercice 4. Tore et bouquets de sphères

Montrez que le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

🍷Exercice 5. Suspensions

Soit X un espace topologique. Son cône CX est l'espace quotient $X \times I / X \times \{1\}$. Sa suspension est l'espace quotient $CX / X \times \{0\}$ (faites un dessin). Calculez l'homologie du cône de X et de la suspension de X en fonction de l'homologie de X .

Exercice 6. Homologie de la bouteille de Klein

Calculez l'homologie de la bouteille de Klein.

Exercice 7. Homologie de quelques espaces 'pathologiques'

1. Calculez l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à n origines.
2. Calculez l'homologie de l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

♣Exercice 8. Homologie du tore à g trous.

1. Soit X_g une sphère dont on a retiré $2g$ petits disques D_i^2 , $1 \leq i \leq 2g$. Calculez l'homologie de X_g , ainsi que l'application induite en homologie par $\bigsqcup S_i^1 \hookrightarrow X_g$.
2. Calculez l'homologie du tore à g -trous S_g .

Exercice 9. Homologie du tore à g trous (bis).

Soit S_g le tore à g trous et $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g .

1. Calculez l'homologie de $S_g \setminus X$.
2. Calculez l'homologie du quotient S_g/Y .
3. Calculez l'homologie de $(S_g \setminus X)/Y$.

Exercice 10. H -coespaces

On appelle H -coespace un espace pointé (X, x) , muni d'une application $\delta : X \rightarrow X \vee X$ tel que si p_i désigne la projection du bouquet sur son i -ième facteur, on a $p_i \circ \delta \sim \text{Id}_X$ ($i = 1, 2$). Notons $p : X \vee X \rightarrow X$ l'application dont la restriction à chacun des facteurs du bouquet vaut Id_X .

1. Montrez que la suspension d'un espace est un H -coespace.
2. Soit (X, x) un H -coespace et $f, g : (X, x) \rightarrow (X, x)$. On suppose qu'il existe un voisinage ouvert de x qui se rétracte par déformation sur x . Montrez que pour tout $n \geq 1$, l'application $\overline{H}_n(f) + \overline{H}_n(g)$ est égale à l'application induite en homologie par la composée

$$X \xrightarrow{\delta} X \vee X \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{p} X.$$

Déduisez que si X est un H -coespace alors pour tout $k \geq 0$ il existe $f : X \rightarrow X$ telle que $H_n(f)$ est la multiplication par k pour tout $n \geq 1$.

Exercice 11. Produit et smash produit par une sphère

Soit (X, x) un espace topologique pointé et $n \geq 1$.

1. Calculez $H_*(X \times S^n; R)$ en fonction de $H_*(X; R)$.
2. Montrez que pour $k \geq 0$ les R -modules d'homologie $H_i((S^n)^{\times k}; R)$ sont libres et donner leur rang.
3. Le smash produit $S^d \wedge X$ est le quotient $S^d \times X / S^d \vee X$. On suppose qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}_x$ contenant x qui se rétracte par déformation sur X . Calculez l'homologie de $S^d \wedge X$.

3 Théorie du degré

♣Exercice 12. Calcul du degré.

Soit $n \geq 1$ et $f : S^n \rightarrow S^n$ une application continue. On rappelle que le degré de f est le nombre entier $\text{deg}(f)$ tel que pour tout $z \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$, $H_n(f)(z) = \text{deg}(f)z$.

1. Montrez que si $\text{deg}(f) \neq 0$ alors f est surjective. Donnez un contre-exemple à la réciproque. Montrez que si f est injective, alors $\text{deg}(f) = \pm 1$ (on admettra le théorème de l'invariance du domaine). Donnez un contre-exemple à la réciproque.

- On identifie S^1 au cercle unité de $\mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrez que le quotient $S^1/\{e^{2in\pi/k} | 1 \leq n \leq k\}$ est homéomorphe à un bouquet de k cercles, et déduisez-en que le degré de l'application $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^k$ (resp. $z \mapsto (1/z)^k$) est égal à k (resp $-k$).
- Soit $A \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, qu'on restreint en une application $A : S^n \rightarrow S^n$. Montrez que $\deg(A) = \det(A)$.
- Montrez que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, le degré de $f : S^n \rightarrow S^n$ est égal au degré de sa suspension $\Sigma f : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$. Déduisez en un morphisme surjectif de groupes :

$$\pi_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z})$$

♣Exercice 13. Applications du degré.

1. Points fixes et points antipodaux.

- Montrez que toute application continue $f : S^n \rightarrow S^n$ sans point fixe est homotope à l'antipode (on peut remarquer que pour une telle application f l'origine 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$ n'appartient jamais au segment $[f(x), -x]$).
- Montrez que si $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ est une application continue, alors soit f admet un point fixe, soit il existe $x_0 \in S^{2n}$ tel que $f(x_0) = -x_0$.

2. Groupes agissant librement. Soit G un groupe agissant librement sur S^{2n} par homéomorphismes. Montrez que G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Champs de vecteurs.

- Montrez qu'il existe sur S^{2n+1} un champ de vecteurs tangents continu partout non nul.
- Montrez le 'théorème de la boule chevelue' : sur S^{2n} , tout champ de vecteurs tangents continu s'annule au moins en un point. (Si v_x est un champ de vecteurs tangents, on pourra considérer la fonction $f(x) = v_x / \|v_x\|$).

4 Théorèmes de Brouwer et Borsuk-Ulam

Exercice 14. Applications du théorème de Brouwer

- Un théorème de point fixe.** Montrez que toute application homotopiquement triviale $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ admet un point fixe.
- Théorème de Perron-Frobenius.** Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de taille n , inversible et à coefficients $a_{i,j} \geq 0$. Montrez que A admet une valeur propre strictement positive associée à un vecteur propre dont les coordonnées sont positives ou nulles. (Indication : considérez l'application $\Delta^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$.)
- Un théorème des valeurs intermédiaires.** Soit $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, dont on note f_i les composantes. On suppose que pour tout i , et pour tout $x_1, \dots, x_n$ on a :

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0 \quad \text{et} \quad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0.$$

Montrez qu'il existe un point de $[0, 1]^n$ où f s'annule. (Indication : si a est un nombre réel, on pose $\bar{a} = \min\{1, \max\{0, a\}\}$. Utilisez la fonction $\phi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n) + x_1, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) + x_n)$.)

♣Exercice 15. Transfert

Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement à deux feuillets.

- Montrez que l'application de transfert $t : C_*(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow C_*(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui envoie un simplexe σ sur la somme de ses relèvements est un morphisme de complexes. Montrez qu'on a une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(t)} H_i(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(p)} H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_{i-1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_{i-1}(t)} \dots$$

- Calculez l'homologie modulo 2 des espaces projectifs réels.

☛ Exercice 16. Théorème de Borsuk-Ulam

- Supposons qu'il existe $f : S^m \rightarrow S^n$ avec $m > n \geq 1$, telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^m$.
 - Soit $\bar{f} : \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^n$ l'application induite entre espaces projectifs. Montrez que les applications $f, \bar{f}$ définissent un morphisme entre les suites exactes longues de transfert associées au revêtements à deux feuillets $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m, S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.
 - Déduisez-en qu'une telle application f ne peut exister.
- Théorème de Borsuk-Ulam.** Soit $n \geq 1$. Montrez que pour toute application continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Exercice 17. Applications du théorème de Borsuk-Ulam

- Théorème de Lusternik Schnirelmann.** Soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des fermés de S^n qui recouvrent S^n . Montrez que l'un d'entre eux contient deux points antipodaux.
- Théorème du sandwich au jambon.** Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles Lebesgue-mesurables bornés de $\mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe un hyperplan H qui coupe chaque A_i en deux parties de mesure égale.