Complexes et homologie (Corrigé5)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 1 (Exemples élémentaires de complexes)

1. Pour la première question, on peut prendre $C_n = A_n$ pour tout $n \geq 0$, avec des différentielles nulles.
   Pour la seconde question, on peut écrire chaque A_n comme le quotient d'un groupe abélien libre par un sous groupe abélien libre : $0 \to R_n \xrightarrow{\iota_n} L_n \to A_n \to 0$. On définit $C_n = L_n \oplus R_{n-1}$ avec la différentielle valant 0 sur L_n et ι_{n-1} sur R_{n-1}.
2. Un exemple trivial : on prend un groupe abélien A qui n'est pas de type fini, et le complexe exact $0 \to A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0$ nous convient.

Exercice 2 (Homologie simpliciale de Δ_n)

En homologie singulière, on sait que Δ_n est contractile et donc son homologie est nulle sauf en degré 0, où elle vaut $\mathbb{Z}$. C'est aussi ce que nous allons prouver pour l'homologie simpliciale.

On introduit d'abord le morphisme d'augmentation $\begin{array}{cccc} \varepsilon : & C_0(\Delta_n) & \to & \mathbb{Z} \\ & \sum_i a_i[e_i] & \mapsto & \sum_i a_i \end{array}$. On vérifie alors $\operatorname{Im} d_1 = \ker \varepsilon$, et donc

$$H_0(C_*(\Delta_n)) = C_0(\Delta_n)/\ker \varepsilon \simeq \mathbb{Z}.$$

Pour $\sigma_1 = [e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}]$ avec $0 < i_1 < \cdots < i_k$, on note $e_0 \cdot \sigma_1 = [e_0, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}]$. Ecrivons alors, pour $i \geq 1$, $\sigma = e_0 \cdot \sigma_1 + \sigma_2 \in C_i(\Delta_n)$ avec σ_1, σ_2 ne contenant pas e_0. Si σ est un cycle, on a $d\sigma = \sigma_1 - e_0 \cdot d\sigma_1 + d\sigma_2 = 0$ et donc $\sigma_1 + d\sigma_2 = 0$. On en déduit que $\sigma = -e_0 \cdot d\sigma_2 + \sigma_2 = d(e_0 \cdot \sigma_2)$ est aussi un bord. D'où le résultat.

Exercice 3 (Caractéristique d'Euler d'un complexe)

1. Il suffit de factoriser les différentielles :

$$0 \to \ker d_i \to C_i \to \operatorname{Im} d_i \to 0;$$

$$0 \to \operatorname{Im} d_i \to \ker d_{i-1} \to H_{i-1} \to 0.$$

2. On calcule $\chi(C_*) = -200 + 360 - 359 + \cdots + 2 - 1 = -20$. Mais si C_* était exacte, alors son homologie serait nulle, et par (1) on aurait $\chi(C_*) = 0$.

Exercice 4 (Suites exactes courtes)

1. Les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(a) \Rightarrow (c)$ sont triviales.
   Pour $(b) \Rightarrow (a)$, raisonnons comme suit : $s \circ g \in \operatorname{End}(B)$ étant un projecteur, on définit $q = \mathrm{id}_B - s \circ g : B \to B$. Alors on a $\operatorname{Im}(q) = \ker(g) = \operatorname{Im}(f)$, et donc la composée $u = q \circ f : A \to \operatorname{Im}(f)$ est un isomorphisme. On vérifie facilement que $r = u^{-1} \circ q : B \to A$ est la projection qui nous convient. La preuve de $(b) \Rightarrow (a)$ est similaire.
2. Si C est libre, alors la condition (b) est vérifiée.

Exercice 5 (Complexes d'homologie triviale)

Comme le complexe C_* est exact, on note $Z_i = \operatorname{Im}(d_{i+1}) = \ker(d_i) \subseteq C_i$: c'est un $\mathbb{Z}$-module libre (car $\mathbb{Z}$ est principal), et on dispose de suites exactes courtes

$$0 \to Z_i \to C_i \to Z_{i-1} \to 0.$$

On remarque que Z_{-1} est nul (et donc libre aussi). Par l'Exercice 4, toutes ces suites exactes sont scindées et on a un isomorphisme de groupes abéliens libres $C_i \xrightarrow{\sim} Z_i \oplus Z_{i-1}$ pour tout i. Ces isomorphismes induisent bien les différentielles décrites.

Exercice 6 (Applications usuelles des suites exactes longues)
Ce sont des conséquences directes de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de complexes.

Exercice 7 (Lemme des cinq)
1. On effectue une chasse au diagramme.
2. Il suffit d'insérer les deux suites exactes longues d'homologie dans un diagramme commutatif avec les morphismes de comparaison. Le lemme des cinq nous permet de conclure.

Exercice 8 (Lemme des neuf)
Un autre entraînement pour la chasse au diagramme.

Exercice 9 (Un exemple de théorème de coefficients universels)
1. On a une suite exacte courte de complexes (en utilisant le fait que C_* est sans torsion) :
$$0 \to C_* \xrightarrow{n} C_* \to C_*/n \to 0.$$
On peux donc conclure par la suite exacte longue associée en homologie, qu'il faut casser.
2. On a des flèches de comparaison entre deux suites exactes courtes de complexes :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_* \arrow[r, "n"] \arrow[d, "f_*"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & C_*/n \arrow[r] \arrow[d, "f_*/n"] & 0 . \\ 0 \arrow[r] & D_* \arrow[r, "n"] & D_* \arrow[r] & D_*/n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
Elles induisent des flèches de comparaison entre les deux suites exactes longues associées. On peut conclure par le lemme de cinq.
Pour voir que la réciproque est fausse, on peut prendre $C_* = D_*$ le complexe concentré en degré 0 avec le groupe $\mathbb{Z}$, et le morphisme f donné par multiplication par $n+1$.

+. On peut aussi demander un isomorphisme de comparaison pour toutes les réductions modulo n en utilisant l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans son complété $\widehat{\mathbb{Z}}$. Notons que l'obstruction n'est pas homologique mais vient de l'approximation.

Exercice 10 (Un exemple de complexe en théorie des groupes)

1.2.3. Il s'agit de calculer fastidieusement $d \circ d = 0$. Puis on observe les définitions des premiers groupes de cohomologie.

4. La suite exacte courte de groupes abéliens $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ induit la suite exacte courte de complexes
$$0 \to C^*(G, M') \to C^*(G, M) \to C^*(G, M'') \to 0.$$
D'où la suite exacte longue en cohomologie associée.

Exercice 11 (Cônes et équivalences d'homologie)
1. On calcule
$$\begin{pmatrix} -d_C & f \\ 0 & d_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_C & f \\ 0 & d_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_C^2 & -d_C f + f d_D \\ 0 & d_D^2 \end{pmatrix} = 0.$$

2. La suite exacte courte de complexes

$$0 \to D_* \xrightarrow{i} C(f)_* \xrightarrow{p} (sC)_* \to 0$$

est facile à construire : i est l'inclusion naturelle en chaque degré et, en degré j, p est $(-1)^j\pi$ où π est la projection naturelle (p est la projection naturelle avec alternance de signe selon la parité du degré).
La suite exacte longue associée est exactement celle dans l'énoncé. La coïncidence de l'application de connexion ∂ et f_* vient de la construction par lemme du serpent. Finalement, f_* induit des isomorphismes en homologie (f est appelé *quasi-isomorphisme*) si et seulement si les ∂ sont des isomorphismes, c'est-à-dire si et seulement si $C(f)_*$ a homologie nulle (par l'argument de l'Exercice 6).

Exercice 12 (Cônes et équivalences d'homotopie)
On rappelle qu'on dit que $C(f)_*$ est *contractile* si les deux morphismes de complexes

$$\mathrm{id}_{C(f)} : C(f)_* \to C(f)_* \quad \text{et} \quad 0 : C(f)_* \to C(f)_*$$

sont homotopes.
On garde les notations de l'Exercice 11 pour la suite exacte : $0 \to D_* \xrightarrow{i} C(f)_* \xrightarrow{p} (sC)_* \to 0$, avec $p_* = (-1)^*\pi_*$.

1. Par hypothèse, on a $i = \mathrm{id}_{C(f)} \circ i \sim 0 \circ i = 0$, c'est-à-dire que l'injection $i : D_* \to C(f)_*$ est homotope à zéro. On note l'homotopie $h : D_* \to C(f)[1]_*$: par définition on a $dh + hd = i$. On vérifie que $r = \pi \circ h : D_* \to C_*$ est un morphisme de complexes :

$$(\pi h)d - d(\pi h) = \pi(i - dh) + d\pi h = \pi i + (d\pi - \pi d)h = 0.$$

De plus, c'est un inverse homotopique à droite de f. En effet, si on note $\pi' : C(f)_* \to D_*$ la projection naturelle, alors on a $\mathbb{1}_D = \pi' i$ et $f\pi + d\pi' = \pi' d$. On en déduit alors :

$$\mathrm{id}_D - fr = \pi' i - f\pi h = \pi'(dh + hd) - f\pi h = (f\pi + d\pi')h + \pi' hd - f\pi h = d\pi' h + \pi' hd.$$

Autrement dit, $\pi' h$ est une homotopie entre id_D et fr.
2. On utilise le même type d'argument qu'au (1) pour obtenir un inverse homotopique à gauche l. Alors on a $l \sim l \circ f \circ r \sim r$, et donc $f \circ l \sim f \circ r \sim \mathbb{1}$. C'est dire que l est aussi inverse à droite, et f est une équivalence d'homotopie.

Exercice 13 (Equivalences d'homologie vs équivalences d'homotopie)
1. L'homologie est un invariant homotopique, c'est dans le cours. La réciproque n'est pas vraie : il suffit de trouver un complexe qui est exact mais pas contractile (alors l'identité est un quasi-isomorphisme mais pas une équivalence d'homotopie.) Par exemple, le complexe $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$.
2. Par l'Exercice 5, on peut supposer $C_i = Z_i \oplus Z_{i-1}$ de groupes abéliens libres, avec la différentielle d_i décrite. Alors, en prenant $h_i : D_i \to D_{i+1}$ induisant l'identité sur Z_i et étant identiquement nulle sur Z_{i-1}, on obtient $(\mathrm{id}_C)_i = d_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i$ comme voulu.
3. Le fait que f_* est un quasi-isomorphisme implique que le cône $C(f)_*$ est un complexe exact par l'Exercice 11. Par construction du cône, tous les termes sont libres, donc $C(f)_*$ est contractile par la Question 2. Finalement, l'Exercice 12 permet de conclure que f_* est une équivalence d'homotopie.