Groupes d'homotopie supérieurs et catégories (Corrigé4)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 1 (Groupes d'homotopie supérieurs et revêtements)

L'application de revêtement $p : E \rightarrow B$ induit $p_{\#} : \pi_n(E, e) \rightarrow \pi_n(B, b)$ avec $f(e) = b$. Comme S^n est simplement connexe pour $n \geq 2$, on peut toujours relever $f : (S^n, s) \rightarrow (B, b)$ en une application $\tilde{f} : (S^n, s) \rightarrow (E, e)$. Cette dernière vérifie alors $p_{\#}([\tilde{f}]) = [f]$. De plus, la propriété de relèvement des homotopies implique que $p_{\#}$ est injective, donc est un isomorphisme.

Pour S^1 , on utilise le revêtement $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, qui induit $\pi_n(\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\sim} \pi_n(S^1, \bar{0})$ pour $n \geq 2$. Comme $\mathbb{R}$ est contractile, tous ces groupes abéliens sont triviaux.

Exercice 2 (Nullité des groupes d'homotopie)

Soit $f : (S^n, s) \rightarrow (X, x)$ une application homotope par une homotopie H (non nécessairement pointée) à une application constante (qui est $H(\cdot, 1)$). Quitte à effectuer une rotation, on suppose que le point-base de S^n est le pôle nord $s = (0, \dots, 0, 1)$. On définit alors une nouvelle homotopie $\tilde{H} : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$ via

$$\tilde{H}((s_0, \dots, s_n), t) = \begin{cases} H\left(\left(\frac{s_0}{\alpha}, \dots, \frac{s_{n-1}}{\alpha}, 2s_n + 1\right), t\right) & \text{si } s_n < 0, \text{ où } \left\| \left(\frac{s_0}{\alpha}, \dots, \frac{s_{n-1}}{\alpha}, 2s_n + 1\right) \right\| = 1; \\ H((0, \dots, 0, 1), s_n + (1 - s_n)t) & \text{si } s_n \geq 0. \end{cases}$$

Cette dernière relie (par une homotopie pointée) la fonction constante $H(s, 1)$ à un certain prolongement $\tilde{f}$ de f : c'est en fait un changement de point-base de f . La classe de $\tilde{f}$ est triviale dans $\pi_n(X, H(s, 1))$ et de fait $[f]$ l'est alors aussi dans $\pi_n(X, x)$.

Exercice 3 (Premiers groupes d'homotopie des sphères S^n , $n \geq 2$)

1. On prend un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de S^m par des cartes locales de sorte que chaque U_i est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$ via φ_i . Comme S^n est compact, on peut restreindre I à un sous-ensemble fini J tel que les $f^{-1}(U_i)$, $i \in J$, recouvrent S^n .

Soit $i \in J$. Comme $f^{-1}(U_i)$ est localement compact et séparé, que les applications différentiables $f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$ séparent les points (et ne s'annulent pas toutes en un même point), le théorème de Stone-Weierstrass dit que $\varphi_i \circ f : f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est approchable uniformément par une $\tilde{f}_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors $\varphi_i \circ f$ est homotope via une homotopie affine H_i à $\tilde{f}_i$.

Enfin, on prend une partition de l'unité adaptée aux $f^{-1}(U_i)$, $i \in J$, pour recoller les $\varphi_i^{-1} \circ \tilde{f}_i$ et les $\varphi_i^{-1} \circ H_i$.

2. Supposons $n < m$. Par (1), toute $f : S^n \rightarrow S^m$ est homotope à une $\tilde{f} : S^n \rightarrow S^m$ différentiable (et l'homotopie peut être choisie pointée, ou alors on utilise l'Exercice 2). Par lemme de Sard, $\tilde{f}$ possède une valeur régulière $x \in S^m$. Comme n est strictement inférieur à m , cette valeur x n'est pas dans l'image de $\tilde{f}$ et $\tilde{f}$ se factorise par l'espace contractile $S^m \setminus \{x\}$. Donc sa classe est triviale dans $\pi_n(S^m, *)$, et ce dernier est le groupe trivial.

Exercice 4 (Fibrations de Serre et groupes d'homotopie supérieurs)

1. On procède de même que pour la preuve du relèvement des homotopies pour un revêtement. On remarque que, parce que la paire $(D^k \times I, D^k \times \{0\}) \cup S^{k-1} \times I$ est homéomorphe à $(D^k \times I, D^k \times \{0\})$, la propriété de relèvement dans la définition d'une fibration de Serre peut se permettre de fixer les bords.

- 2.(a) Soit $[f] \in \pi_n(E, x)$ la classe d'une application $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (E, x)$. Parce que $\pi_n(B, b)$ est trivial, $p \circ f$ est homotope à une application constante (égale à b) par une homotopie pointée H . On a donc affaire au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ D^n \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

L'application $\tilde{H}$ existe car p est une fibration de Serre, et elle fournit une homotopie (que l'on peut même choisir en fixant les bords) entre $g \circ f$ et $h = \tilde{H}(\cdot, 1) : D^n \times \{1\} \rightarrow F_b$. Alors l'image de $[h] \in \pi_n(F_b, x)$ dans $\pi_n(E, x)$ est $[f]$.

- 2.(b) Soient $[f_1], [f_2] \in \pi_n(F_b, x)$ de même image dans $\pi_n(E, x)$. On a alors une homotopie

$$H : (D^{n+1} \times \{0\}, \partial D^{n+1} \times \{0\}) \rightarrow (E, x)$$

entre f_1 et f_2 . Comme $\pi_{n+1}(B, b)$ est trivial, on a

$$\begin{array}{ccc} D^{n+1} \times \{0\} & \xrightarrow{H} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ D^{n+1} \times [0, 1] & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

où G est une homotopie pointée vers une application constante. Alors $\tilde{G}(\cdot, 1)$ (que l'on a relevée en fixant les bords aussi) est une homotopie entre f_1 et f_2 dans (F_b, x) , et on a déjà $[f_1] = [f_2] \in \pi_n(F_b, x)$.

Exercice 5 (Premiers groupes d'homotopie des groupes de matrices)

- L'action de $SO_n(\mathbb{R})$ sur S^{n-1} est transitive et le stabilisateur de $s = (1, 0, \dots, 0)$ est isomorphe à $SO_{n-1}(\mathbb{R})$. Par transitivité de l'action, il suffit de voir que p est un fibré localement trivial autour de s . Si on a une section locale $\iota : U \hookrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ au voisinage de s , alors $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times SO_{n-1}(\mathbb{R})$ et ce serait gagné. Il reste alors à voir l'existence de ι par une application du théorème des fonctions implicites.
- On sait $\pi_1(SO_3(\mathbb{R}), 1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par l'Exercice 11 du TD3. Comme on a $\pi_1(S^{n-1}, s) = \{1\}$ et $\pi_2(S^{n-1}, s) = 0$ pour $n \geq 4$ (par l'Exercice 3), la question (2) de l'Exercice 4 nous donne

$$\pi_1(SO_{n-1}(\mathbb{R}), 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(SO_n(\mathbb{R}), 1).$$

D'où $\pi_1(SO_n(\mathbb{R}), 1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 3$.

Le revêtement à deux feuillets $S^3 \simeq SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$ induit

$$0 \rightarrow \pi_2(S^3, s) \xrightarrow{\sim} \pi_2(SO_3(\mathbb{R}), 1)$$

par l'Exercice 1. De plus, on a $\pi_2(S^{n-1}, s) = 0$ pour tout $n \geq 4$, donc $\pi_2(SO_{n-1}(\mathbb{R}), 1) \rightarrow \pi_2(SO_n(\mathbb{R}), 1)$ est surjective. Ainsi, $\pi_2(SO_n(\mathbb{R}), 1)$ est nul pour tout $n \geq 3$.

- Le groupe $SL_n(\mathbb{R})$ se rétracte par déformation sur $SO_n(\mathbb{R})$: on a donc

$$\pi_1(SL_n(\mathbb{R}), 1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \pi_2(SL_n(\mathbb{R}), 1) = 0.$$

On a un homéomorphisme $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times \times SL_n(\mathbb{C})$ (pas de groupes!), qui se rétracte par déformation sur $S^1 \times SL_n(\mathbb{C})$. D'où, par l'Exercice 1 :

$$\pi_1(GL_n(\mathbb{C}), 1) \simeq \mathbb{Z} \times \pi_1(SL_n(\mathbb{C}), 1), \quad \pi_2(GL_n(\mathbb{C}), 1) \simeq \pi_2(SL_n(\mathbb{C}), 1).$$

De plus, $SL_n(\mathbb{C})$ se rétracte par déformation sur $SU_n(\mathbb{C})$ et a même type d'homotopie que lui. Et $U_n(\mathbb{C})$ a même type d'homotopie que $S^1 \times SU_n(\mathbb{C})$.

Pour traiter $SU_n(\mathbb{C})$, enfin, on utilise le fibré localement trivial $SU_n(\mathbb{C}) \rightarrow S^{2n-1}$ de fibre $SU_{n-1}(\mathbb{C})$. De plus, $SU_2(\mathbb{C}) \simeq S^3$ est de π_1 et π_2 triviaux. Comme on a $\pi_1(S^{2n-1}, s) = \{1\}$ et $\pi_2(S^{2n-1}, s) = 0$ pour tout $n \geq 3$, par l'Exercice 4, les π_1 et π_2 de $SU_n(\mathbb{C})$ sont tous triviaux pour $n \geq 2$.

Exercice 6 (H -cogroupes)

- Soient $f, g : (X, *) \rightarrow (Y, *)$. On note d'abord $\Delta : Y \vee Y \rightarrow Y$ la codiagonale (qui vaut l'identité sur chacune des deux composantes). On définit alors le produit de f et g par $\Delta \circ (f \vee g) \circ \delta$. L'associativité suit de (i) et c est le neutre. On définit l'inverse de f par $f \circ \chi$ (ce qui suit de (iii)).
- En notant $I = [0, 1]$, on note que $(S^n, *)$ est homéomorphe à $(I^n, \partial I^n)$: on va définir δ et χ sur $(I^n, \partial I^n)$ plutôt. On prend alors $\delta : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n, \partial I^n) \cup_{I^{n-1} \times \{1\} \sim I^{n-1} \times \{0\}} (I^n, \partial I^n)$ qui coupe la dernière coordonnée en 1/2 et accélère par deux son parcours. Pour χ , on renverse le sens de parcours sur la dernière coordonnée ($t \mapsto 1 - t$).

Exercice 7 (Prolongement des applications sur les espaces cellulaires)

On sait que $g \circ f : (S^{n-1}, *) \rightarrow (Z, *)$ est homotope via une homotopie pointée H à la fonction constante ϵ_* . On peut bien sûr prolonger cette fonction constante ϵ_* sur tout D^n . On se retrouve face au diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \times [0, 1] \cup D^n \times \{0\} & \xrightarrow{H \cup \epsilon_*} & Z \\ \downarrow & \searrow \text{---} \overline{H} & \\ D^n \times [0, 1] & & \end{array}$$

Autrement dit, on se demande si $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ est une cofibration : c'est le cas (et on l'avait déjà utilisé dans l'Exercice 16 du TD2) et vient du fait que $(D^n \times [0, 1], S^{n-1} \times [0, 1] \cup D^n \times \{0\})$ est homéomorphe à $(D^n \times [0, 1], D^n \times \{0\})$. Reste à poser $\overline{g} = \overline{H}(\cdot, 1) : Y \rightarrow Z$.

Exercice 8 (Groupes d'homotopie supérieurs et espaces fonctionnels)

- (a).(b).(c)
- (d) Si on note x le point distingué de $S^n \wedge S^m$, alors $S^n \wedge S^m \setminus \{x\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Le smash produit $S^n \wedge S^m$ est ainsi (vérifier la topologie!) le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^{n+m}$: il est homéomorphe à S^{n+m} .
- Par l'argument de l'Exercice 17 du TD1, on voit que l'espace des fonctions continues pointées

$$(S^k, *) \rightarrow (\Omega^n(Y)_\infty = \{(S^n, *) \rightarrow (Y, y)\})$$

est homéomorphe à l'espace des fonctions continues pointées

$$(S^k \times S^n, S^k \vee S^n) \simeq (S^k \wedge S^n, *) \simeq (S^{k+n}, *) \rightarrow (Y, y).$$

Reste à prendre les classes d'équivalence d'homotopie pour avoir l'isomorphisme de groupes $\pi_k(\Omega^n(Y)_\infty, \epsilon_y) \simeq \pi_{k+n}(Y, y)$.

Exercice 9 ((Co)produits catégoriques, objets initiaux et finaux)

- 2.

Exercice 10 (Carrés cartésiens et cocartésiens)

- 2.

Exercice 11 (Equivalence de catégories et classification des revêtements)

Voir Exercice 6 du TD3.

Exercice 12 (Théorème de Brouwer)

Supposons $f : D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ sans point fixe. On obtient alors une rétraction $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ en prenant pour $r(x)$ l'intersection de S^n avec la demi-droite ouverte d'origine $f(x)$ et contenant x . On obtient alors l'identité comme composée

$$S^n \xrightarrow{\subset} D^{n+1} \xrightarrow{r} S^n.$$

En appliquant le foncteur H_n , grâce aux hypothèses et au fait que D^{n+1} est contractile, l'identité de $H_n(S^n)$ se factorise par 0 : c'est idiot.