Topologie algébrique
2014-2015.

TD : feuille n°4
Groupes d'homotopie supérieurs et catégories

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité.

☕Exercice 1. Groupes d'homotopie supérieurs et revêtements

Soit $p : E \to B$ un revêtement. Montrer que pour $n \geq 2$, on a un isomorphisme de groupes $p_\sharp : \pi_n(E, *) \to \pi_n(B, *)$. Calculez $\pi_n(S^1, *)$ pour tout $n \geq 2$.

☕Exercice 2. Nullité des groupes d'homotopie

Soit $(X, *)$ un espace topologique pointé et soit une application pointée $f : (S^n, *) \to (X, *)$. Montrez que la classe d'homotopie pointée $[f] \in \pi_n(X, *)$ est égale à $f_\sharp([\mathrm{Id}_{S^n}])$. Montrez que $\pi_n(X, *)$ est un groupe trivial si et seulement si toute application continue $f : S^n \to X$ est homotope (par une homotopie non nécessairement pointée) à une application constante.

Exercice 3. Premiers groupes d'homotopie des sphères S^n, $n \geq 2$.

1. Montrez que toute application continue $f : S^n \to S^m$ est homotope à une application différentiable. (Utilisez le théorème de Stone-Weierstrass.)
2. A l'aide du lemme de Sard, montrez que si $1 \leq n < m$ alors $\pi_n(S^m, *)$ est un groupe trivial.

Exercice 4. Fibrations de Serre et groupes d'homotopie supérieurs

Une application $p : E \to B$ est une fibration de Serre si pour tout k et pour tout diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{tikzcd} D^k \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ D^k \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

il existe une application $\overline{H} : D^k \times I \to E$ telle que $p \circ \overline{H} = H$ et $\overline{H} \circ i = f$.

1. Un fibré localement trivial de fibre l'espace topologique F est une application continue $p : E \to B$ telle que pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant b et un homéomorphisme $\Phi : \mathcal{U} \times F \xrightarrow{\approx} p^{-1}(\mathcal{U})$, qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times F \arrow[rr, "\Phi", "\approx"'] \arrow[dr, "\mathrm{proj}"'] & & p^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[dl, "p"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd} .$$

   Montrez que les fibrés localement triviaux sont des fibrations de Serre (utilisez le lemme de Lebesgue).
2. Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre, $b \in B$ soit $F_b = p^{-1}(b)$ et $x \in F_b$. On fixe un entier $n \geq 1$.
   (a) Montrez que si $\pi_n(B, b) = 0$, alors l'inclusion $F_b \hookrightarrow E$ induit une surjection $\pi_n(F_b, x) \twoheadrightarrow \pi_n(E, x)$.
   (b) Montrez que si $\pi_{n+1}(B, b) = 0$, alors l'inclusion $F_b \hookrightarrow E$ induit une injection $\pi_n(F_b, x) \hookrightarrow \pi_n(E, x)$.

Exercice 5. Premiers groupes d'homotopie des groupes de matrices

1. Montrez que $\begin{array}{cccc} p : & SO_n(\mathbb{R}) & \to & S^{n-1} \\ & g & \mapsto & g((1, 0, \dots, 0)) \end{array}$ est un fibré localement trivial de fibre $SO_{n-1}(\mathbb{R})$.
2. Montrez que pour tout $n \geq 3$ on a $\pi_1(SO_n(\mathbb{R}), \mathrm{Id}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_2(SO_n(\mathbb{R}), \mathrm{Id}) = 0$.
3. Calculez de même le π_1 et le π_2 de $SL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6. H-cogroupes

Un H-cogroupe est un espace topologique pointé $(X,*)$ muni d'applications continues $\delta : X \to X \vee X$ et $\chi : X \to X$ telles que :

(i) $(\delta \vee \mathrm{Id}_X) \circ \delta$ est homotope à $(\mathrm{Id}_X \vee \delta) \circ \delta$ (par une homotopie pointée),

(ii) si $c : X \to *$ alors $(\mathrm{Id} \vee c) \circ \delta$, $(c \vee \mathrm{Id}) \circ \delta$ sont homotopes par une homotopie pointée à Id_X,

(iii) $(\mathrm{Id} \vee \chi) \circ \delta$ et $(\chi \vee \mathrm{Id}) \circ \delta$ sont homotope par une homotopie pointée à une application constante.

1. Si $(X,*)$ est un H-cogroupe, et $(Y,*)$ un espace topologique pointé, montrez que $[X,*;Y,*]$ possède une structure de groupe.
2. Montrez qu'il existe une structure de H-cogroupe sur S^n, telle que le groupe $[S^n,*;Y,*]$ soit isomorphe à $\pi_n(Y,*)$.

Exercice 7. Prolongement des applications sur les espaces cellulaires

Soit X un espace topologique et $f : S^{n-1} \to X$ une application continue. On note $Y = X \cup_f D^n$. Soit Z un espace topologique tel que $\pi_{n-1}(Z,*) = 0$. Montrez que toute application continue $g : X \to Z$ s'étend en une application continue $\overline{g} : Y \to Z$. (Exemple d'application : soit D une droite projective de $\mathbb{C}P^n$, $f : D \to S^{2n}$ une application continue. Alors f s'étend en une application continue $\mathbb{C}P^n \to S^{2n}$.)

Exercice 8. Groupes d'homotopies supérieurs et espaces fonctionnels

1. Soit $(X,*)$ et $(Y,*)$ des espaces topologiques pointés. On identifie le bouquet $X \vee Y$ au sous-ensemble $X \times \{*\} \cup \{*\} \cup Y$ de $X \times Y$. On appelle *smash produit* de X et Y le quotient $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$. Soient X, Y et Z des espaces compacts séparés.
   (a) Montrez que $X \wedge Y$ est un espace compact séparé.
   (b) Montrez que $X \wedge (Y \wedge Z)$ est homéomorphe à $(X \wedge Y) \wedge Z$.
   (c) Montrez que l'application canonique $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \to X \wedge (Y \vee Z)$ est un homéomorphisme.
   (d) Exemple : montrez que $S^n \wedge S^m$ est homéomorphe à S^{n+m}.
2. Soit (Y, y) un espace métrique pointé. On note $\mathcal{C}(S^n, Y)$ l'espace des fonctions continues de S^n dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme, et $\Omega^n(Y)$ le sous-espace des fonctions continues qui préservent les points base. Montrez que pour tous les entiers k, n strictement positifs on a un isomorphisme de groupes

$$\pi_k(\Omega^n Y, \epsilon_y) \simeq \pi_{k+n}(Y, y) \ .$$

Exercice 9. (Co)produits catégoriques, objets initiaux et finaux

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet de x est *initial* (resp. *final*) si pour tout objet y on a un unique morphisme $x \to y$ (resp. $y \to x$).

Un *produit* des objets x et y est un objet noté z, muni de morphismes $p_x : z \to x$ et $p_y : z \to y$ tel que la propriété universelle suivante est satisfaite. Pour tout couple de morphismes $f_x : a \to x$ et $f_y : a \to y$ il existe un unique morphisme $h : a \to z$ tel que $p_x \circ h = f_x$ et $p_y \circ h = f_y$.

De même, un *coproduit* des objets x et y est un objet noté z, muni de morphismes $i_x : x \to z$ et $i_y : y \to z$ tel que la propriété universelle suivante est satisfaite. Pour tout couple de morphismes $f_x : x \to a$ et $f_y : y \to a$ il existe un unique morphisme $h : z \to a$ tel que $h \circ i_x = f_x$ et $h \circ i_y = f_y$.

1. Montrez que s'ils existent, les objets initiaux, resp. finaux, resp. les produits, resp. les coproduits sont uniques, à un unique isomorphisme près.
2. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on définit la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, dont les ensembles de morphisme sont $\hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(x,y) := \hom_{\mathcal{C}}(y,x)$, et dont la loi de composition est $f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f$ (où la deuxième composition est prise dans $\mathcal{C}$). Montrez qu'on a une dualité entre les notions d'objet initiaux et finaux (resp. de coporduits et de produits) dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
3. Dites si les objets initiaux, resp. finaux, resp. les produits, resp. les coproduits, existent dans les catégories suivantes : Ens, Top, hTop, Top_2 (la catégorie des paires d'espaces), Top_*, Grpes, R-Mod, $\mathrm{Rev}(B)$, $\mathrm{Rev}_*(B,b)$ (les revêtements pointés au dessus de (B,b)), $\Pi_1(X)$ (le groupoïde fondamental de X).

Exercice 10. Carrés cartésiens et cocartésiens

Un carré commutatif
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\ b_2 \arrow[r, "g_2"] & c \end{tikzcd}$$
dans une catégorie $\mathcal{C}$ est dit *cocartésien* s'il vérifie la propriété universelle suivante. Pour tout $\phi_1 : b_1 \to z$ et $\phi_2 : b_2 \to z$ tels que $\phi_1 \circ f_1 = \phi_2 \circ f_2$, il existe une unique $\phi : c \to z$ tel que $\phi \circ g_1 = \phi_1$ et $\phi \circ g_2 = \phi_2$. Le carré est dit *cartésien* s'il vérifie la propriété universelle suivante. Pour tout $\phi_1 : z \to b_1$ et $\phi_2 : z \to b_2$ tels que $g_1 \circ \phi_1 = g_2 \circ \phi_2$, il existe une unique $\phi : z \to a$ tel que $f_1 \circ \phi = \phi_1$ et $f_2 \circ \phi = \phi_2$.

1. Quelle est la relation entre (co)produits catégoriques et carrés (co)cartésiens ?
2. Montrez que si un diagramme
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & b_1 \\ b_2 & \end{tikzcd}$$
peut être complété en un carré cocartésien
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\ b_2 \arrow[r, "g_2"] & c \end{tikzcd}$$
, alors c est unique à un unique isomorphisme près. Déterminez s'il est toujours possible de compléter les diagrammes en des carrés cocartésiens dans les catégories suivantes : Ens, Top, hTop, Top_2, Top_*, Grpes, R-Mod, $\mathrm{Rev}(B)$, $\mathrm{Rev}_*(B, b)$, $\Pi_1(X)$.
3. Faites de même pour les carrés cartésiens.

Exercice 11. Equivalences de catégories et classification des revêtements

Une équivalence de catégories est un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que F est essentiellement surjectif (i.e. tout objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à un objet de la forme $F(c)$) et pleinement fidèle (i.e. pour tout couple c, c' d'objets de $\mathcal{C}$, F induit une bijection $\hom_{\mathcal{C}}(c, c') \xrightarrow{\simeq} \hom_{\mathcal{D}}(F(c), F(c'))$). Reformulez la classification des revêtements comme une équivalence de catégories.

Exercice 12. Théorème de Brouwer

Soit n un entier positif. On suppose qu'il existe un foncteur H_n : hTop $\to$ R-Mod tel que $H_n(\{pt\}) = 0$ et $H_n(S^n) \neq 0$. Démontrez le théorème de Brouwer : toute application continue $f : D^{n+1} \to D^{n+1}$ admet un point fixe.