Revêtements (Corrigé3)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 1 (Propriétés topologiques de la base et de l'espace total)

1. Comme E et B sont localement homéomorphes (Exercice 3 du TD2) et comme p est surjective, E et B partagent les mêmes propriétés locales topologiques. Par exemple, « localement connexe » (resp. « localement connexe par arc »).
2. Comme au (1), « localement homéomorphe à un $\mathbb{R}^n$ » est une propriété locale. Pour les questions d'être séparé ou non, voir question (4).
3. La compacité de E implique celle de $B = p(E)$ par continuité de p. Réciproquement, on suppose que B est compacte. Donnons-nous un recouvrement $\{U_j \mid j \in J\}$ de E. Pour chaque point $b \in B$, par la finitude de sa fibre E_b, on peut choisir des ouverts $\{U_j \mid j \in J_b\}$ qui recouvrent la fibre E_b, où $J_b \subseteq J$ est fini. Comme $p : E \to B$ est un revêtement (en particulier une application ouverte), il existe un voisinage ouvert V_b de b dans B tel que $p^{-1}(V_b)$ est recouvert par ces U_j, $j \in J_b$. On a ainsi un recouvrement ouvert $\{V_b \mid b \in B\}$ de B, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{V_{b_1}, \ldots, V_{b_n}\}$ (par compacité). Alors le sous-recouvrement $\{U_j \mid j \in J_{b_1} \cup \cdots \cup J_{b_n}\}$ est fini et recouvre bien E.

4.(a) Soient x et y deux points distincts de E. Si $p(x)$ est égal à $p(y)$, alors on prend un voisinage trivialisant de $p(x) = p(y)$; par la définition d'un revêtement, x et y sont dans deux ouverts disjoints. Si $p(x)$ est distinct de $p(y)$, par l'hypothèse de séparabilité de B, on dispose deux voisinages disjoints de $p(x)$ et $p(y)$, dont les préimages sont alors deux voisinages disjoints de x et y.

4.(b) Il faut voir qu'il n'existe pas de voisinages disjoints de $(1, 0)$ et $(0, 1)$ stables par l'action de $\mathbb{Z}$. On prend donc deux voisinages, disons $(1, 0) \in U$ et $(0, 1) \in V$, et on va voir qu'ils ont un point commun. D'abord, U contient un petit carré centré en $(1, 0)$. Puis, en itérant l'action de Z, on sait que U contient aussi certains rectangles de plus en plus fins mais aussi de plus en plus longs au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'axe des abscisses. On procède de même pour V, et on s'aperçoit que U et V ont intersection non triviale.

Exercice 2 (Hypothèse de connexité locale pour le relèvement des applications)

1. Une image continue F de S^1 dans X doit être connexe par arcs. Son intersection $F \cap \overline{S}$ avec $\overline{S}$ est donc soit contenue dans S, soit dans $(\overline{S} \setminus S) \cup (S \setminus V)$ où V désigne un voisinage ouvert de $\overline{S} \setminus S$ dans $\overline{S}$. Dans le premier cas, par compacité, $F \cap \overline{S}$ est aussi contenu dans un $S \setminus V$ pour V un voisinage ouvert de $\overline{S} \setminus S$. Dans les deux cas, F est contenu dans un espace contractile, et, pour tout $x \in X$, $\pi_1(X, x)$ est trivial.
2. Supposons l'existence de $f : X \to \mathbb{R}$ relevant l'application $X \to S^1$ décrite. Par continuité de f, $f(\overline{S} \setminus S)$ est un singleton $\{a\}$. Aussi, f est monotone sur $X \setminus (\overline{S} \setminus S)$, de sorte que l'on a $f((0, 0)^-) - f((\overline{S} \setminus S)^+) = \pm 1$. Cela contredit la continuité de f, qui n'existe donc pas.

Exercice 3 (Produits de revêtements)

1. Par récurrence, il suffit de considérer le cas de deux facteurs. Soient $f_1 : X_1 \to Y_1$ et $f_2 : X_2 \to Y_2$ deux revêtements. Montrons que

$$f = (f_1, f_2) : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$

est aussi un revêtement. Soit $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$. On choisit des voisinages trivialisants $U_1 \ni y_1$ dans Y_1 et $U_2 \ni y_2$ dans Y_2. Alors, pour $i = 1, 2$, $f_i^{-1}(U_i)$ est homéomorphe à $U_i \times F_i$ au-dessus de U_i, où F_i est un espace discret. Donc $f^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \times f_2^{-1}(U_2)$ est homéomorphe à $\big(U_1 \times U_2\big) \times \big(F_1 \times F_2\big)$ au-dessus de $U_1 \times U_2$. Autrement dit, $U_1 \times U_2$ est un voisinage trivialisant de (y_1, y_2), et f est un revêtement.

2. Pour le contre-exemple, on observe

$$\operatorname{Exp}^{\mathbb{N}} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to (S^1)^{\mathbb{N}}.$$

Il convient de se rappeler qu'un ouvert dans $(S^1)^{\mathbb{N}}$ contient toujours un ouvert de la forme $U_1 \times \cdots \times U_r \times S^1 \times S^1 \times \cdots$: sa préimage est donc de la forme $V_1 \times \cdots V_r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$. Et cette dernière n'est pas homéomorphe à une union disjointe de copies de $U_1 \times \cdots \times U_r \times S^1 \times S^1 \times \cdots$.

Exercice 4 (Construction de revêtements par recollement)

1.(a) La réflexivité vient de $g_{ii} = \mathbb{1}_{V_i}$, la symétrie vient de $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ et la transitivité viens de la condition de cocycle.

1.(b) L'application $\Sigma \to B$ est bien définie puisque les classes d'équivalence de R sont chacune incluse dans un $\{x\} \times F$. Notons que la préimage de V_i est exactement $V_i \times F$. Donc c'est un revêtement et les V_i sont des voisinages trivialisants.

2. Si on se donne un revêtement $p : E \to B$ de trivialisations $\Phi_i : p^{-1}(V_i) \to V_i \times F$ fixées avec la propriété de recollement $\Phi_j \Phi_i^{-1}(x, f) = (x, g_{ji}(x) f)$, l'application $\Phi : E \to \Sigma/R$ au-dessus de B obtenue par recollement des Φ_i est bien définie. Comme les Φ_i sont des trivialisations, par (1.b), Φ est un homéomorphisme au-dessus de B, c'est-à-dire que E est isomorphe à Σ/R en tant que revêtement de B.

Exercice 5 (Action de groupes, revêtements et propriétés topologiques de la base)

1. Soient $x \in E$ et U un voisinage ouvert de x. Parce que G est séparé et localement compact, on prend $K \subseteq U$ un compact contenant x. On suppose l'existence de $g \in G \smallsetminus \{1\}$ vérifiant $gK \cap K \neq \varnothing$. Ou bien gx n'appartient pas à K, auquel cas, on considère l'ouvert $U \smallsetminus g^{-1}K \ni x$ à la place de U. Ou bien, $gx = y$ appartient à K : on prend alors U_x et U_y des voisinages ouverts séparant x et y (x et y sont distincts car l'action est libre), et on remplace U par $U_x \cap g^{-1}U_y \ni x$. Dans les deux cas, on s'est bien ramené à avoir $gK \cap K = \varnothing$. En faisant de même avec les autres éventuels $g \in G_K \smallsetminus \{1\}$ (qui sont en nombre fini car l'action est propre), on obtient que l'action de G sur E est totalement discontinue.
2. Voir (1) de l'Exercice 1.

Exercice 6 (Morphismes de revêtements)

1. Soient $b \in B$ et U un ouvert trivialisant à la fois p et p'. On obtient alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sim"'] & (p')^{-1}(U) \arrow[d, "\sim"'] \\ U \times F_b \arrow[r] & U \times F'_b \end{tikzcd}$$

De là, on tire que $h(E)$ est à la fois ouvert et fermé : h est surjective par connexité de E'. De ce même diagramme, on voit que $h : E \to E'$ est un revêtement.

$+$. On rappelle le théorème de correspondance galoisienne des revêtements.
Soit X un espace topologique « raisonnable » (connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe). Soit $x \in X$. Alors $E \mapsto p_\sharp \pi_1(E, e)$ induit une correspondance bijective :

$$\left(\begin{array}{c} \textit{classes d'isomorphisme de} \\ \textit{revêtements connexes } (E, e) \xrightarrow{p} (X, x) \end{array} \right) \leftrightarrow \big(\textit{sous-groupes de } \pi_1(X, x)\big).$$

On peut oublier le point-base (dans le revêtement) et rendre la correspondance fonctorielle.

Tant qu'à faire, on passe d'une version contravariante à une version covariante (ici des sous-groupes aux G-ensembles), ce qui permet de faire fi de l'hypothèse de connexité.
Soit X un espace topologique « raisonnable » (connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe). Soit $x \in X$. Alors le foncteur $Y \to \mathrm{Fib}_x(Y)$ (fibre au-dessus de x) induit une équivalence de catégories :

$$\big(\textit{revêtements de } X \textit{ (connexes, resp. finis)}\big) \leftrightarrow \big(\pi_1(X,x)\textit{-ensembles (transitifs, resp. finis)}\big),$$

où les morphismes de la catégorie à gauche sont les morphismes de revêtements au-dessus de X et les morphismes de la catégorie à droite sont les applications $\pi_1(X,x)$-équivariantes.
De plus, les revêtements galoisiens correspondent aux $\pi_1(X,x)$-ensembles de la forme $\pi_1(X,x)/N$ pour N un sous-groupe normal.

2. Par le théorème de correspondance galoisienne, il suffit de démontrer l'énoncé (facile) suivant : si G est un groupe et N un sous-groupe normal de G, alors tout endomorphisme de G/N (en tant que G-ensemble) est un automorphisme.
   On peut bien sûr aussi raisonner directement comme suit. Soit f un endomorphisme du revêtement galoisien $p : E \to B$. Comme p est galoisien, quitte à composer f avec un automorphisme g de E, on peut supposer que $g \circ f$ fixe un point de E. Or un morphisme entre deux revêtements est déterminé par l'image d'un point, donc $g \circ f$ est l'identité.

Exercice 7 (Applications vers un produit de cercles)
Soit $f : V \to (S^1)^{\times n}$ une application continue, avec V de groupe fondamental fini. Parce que $\pi_1\big((S^1)^{\times n}, \overline{0}\big) \simeq \mathbb{Z}$ est sans torsion, l'image de

$$\pi_1(f) : \pi_1(V, v) \to \pi_1\big((S^1)^{\times n}, f(v)\big)$$

est triviale.
Le théorème de relèvement des applications appliqué à f et au revêtement $\mathbb{R}^n \to (S^1)^{\times n}$, implique que f se factorise par l'espace $\mathbb{R}^n$, qui est contractile. Donc f est homotopiquement triviale.

Exercice 8 (Variétés topologiques de groupe fondamental fixé)
Pour le cas de $\mathbb{Z}$, il suffit de remarquer que l'on a

$$\pi_1\big(S^1 \times [0,1]^2, (\overline{0}, 0, 0)\big) \simeq \mathbb{Z}.$$

Occupons-nous donc de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 1$ fini. On va s'inspirer de la construction de ce qu'on appelle « espaces lenticulaires ». On cherche une action totalement discontinue de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur S^3 : par l'Exercice 5, il suffit qu'elle soit libre (la propreté est automatique car $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini).
On observe $S^3 \simeq \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$, et on prend ξ une racine primitive n-ème de l'unité dans $\mathbb{C}$. L'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur S^3 via $\overline{k}.(a,b) = (\xi a, \xi^k b)$ est libre et chaque $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agit par un homéomorphisme. On a alors bien $\pi_1\big(S^3/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), s\big) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 9 (Revêtements des graphes et groupes libres)
1.
2. On réalise L comme le groupe fondamental de $X = \bigvee_{i=1}^n S^1$. Par la correspondance galoisienne, H est le groupe fondamental d'un revêtement de X à k feuillets, noté $p : Y \to X$. Par (1), Y est aussi un graphe fini. On compte sa caractéristique d'Euler :

$$\chi_{\mathrm{top}}(Y) = k \cdot \chi_{\mathrm{top}}(X) = k(1-n).$$

   Par l'Exercice 16 du TD 2, on obtient que le groupe fondamental de Y est le groupe libre sur $1 - \chi_{\mathrm{top}}(Y) = 1 - k + kn$ générateurs.
3.4.

Exercice 10 (Revêtements des groupes de Lie C^0)

1. Les différentes composantes connexes par arcs sont des translatés de la composante connexe par arcs du neutre.
2. Un groupe de Lie C^0 de dimension 0 est constitué de points isolés. S'il est de plus compact, il est donc nécessairement fini.
   Pour l'exemple d'un groupe topologique compact qui n'est pas un groupe de Lie C^0, on peut penser au groupe additif de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques. Faisons la remarque que l'exemple choisi n'est pas anecdotique mais est l'archétype de ce qui intervient localement dans la partie « non lisse » d'un groupe topologique compact.
3. Soient G un groupe de Lie C^0 et $p : H \to G$ un revêtement connexe. L'application composée
   $$p \circ \bullet_H : H \times H \xrightarrow{(p,p)} G \times G \xrightarrow{\bullet} G$$
   vérifie
   $$(p \circ \bullet_H)_\sharp \pi_1\big(H \times H, (1_H, 1_H)\big) = p_\sharp \pi_1(H, 1_H).$$
   On peut alors la relever en une multiplication $\bullet_H : H \times H \to H$ de neutre 1_H. On procède de même pour l'inverse. L'unicité de la structure provient de ce qu'un relèvement dans un revêtement connexe est déterminé par un seul point (ici le neutre).

Exercice 11 (Revêtement universel de $SO_3(\mathbb{R})$)

1. Le produit scalaire en question est $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(x^t\overline{y})$. Pour $s \in SU_2(\mathbb{C})$, on a :
   $$\langle sxs^{-1}, sys^{-1}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(sxs^{-1 t}\overline{s^{-1}}^t\overline{y}^t\overline{s}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(sx^t\overline{y}s^{-1}) = \langle x, y\rangle.$$
   D'où un morphisme de groupes continu $\phi : SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$. L'image de $\begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix}$ par conjugaison (c'est-à-dire l'image de la première colonne par translation notamment) permet de voir que ϕ est de noyau $\{\pm 1\}$.

+. Voici une motivation : $H_0 = \mathfrak{su}_2$ est l'algèbre de Lie (réelle !) du groupe de Lie (réel) $SU_2(\mathbb{C})$, sur laquelle $SU_2(\mathbb{C})$ agit par conjugaison (on parle de *représentation adjointe*). Le produit scalaire introduit est en fait proportionnel à la forme de Killing sur $\mathfrak{su}_2$, qui est préservée par la représentation adjointe.

2. Comme le noyau est discret, l'application tangente $T_1\phi : T_1SU_2(\mathbb{C}) \to T_1SO_3(\mathbb{R})$ est un isomorphisme. En particulier, ϕ est un homéomorphisme (difféomorphisme) local. L'image de ϕ contient donc un voisinage de 1 dans $SO_3(\mathbb{R})$. Comme un groupe de Lie ne possède pas de petit sous-groupe et que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe, ce voisinage engendre $SO_3(\mathbb{R})$ et ϕ est surjective.
3. Comme ϕ est à deux feuillets et que $SU_2(\mathbb{C})$ est séparé, l'Exercice 3 du TD2 dit que ϕ est un revêtement. Par l'Exercice 18 du TD2, $SU_2(\mathbb{C})$ est simplement connexe. Par la correspondance revêtements/groupe fondamental, le groupe fondamental de $SO_3(\mathbb{R})$ est donc égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 12 (Revêtements d'un bouquet de deux cercles)

1.
2. Un sous-groupe d'indice deux est toujours un sous-groupe distingué.
3. Il s'agit d'étudier l'action de monodromie sur la fibre au-dessus du point nodal.

Exercice 13 (Revêtement universel de la bouteille de Klein et ses automorphismes)

1. Voir l'Exercice 11 du TD2. Puis on remarque qu'envoyer a sur $\alpha\beta$ et b sur β induit l'isomorphisme de groupes
   $$< a, b \mid aa = bb > \xrightarrow{\sim} < \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha = \beta > .$$
2.

3. Par (2), G est exactement le groupe d'automorphismes du revêtement universel $\mathbb{R}^2 \to K$, qui est isomorphe au groupe fondamental de K. On peut vérifier facilement que s correspond à β et t correspond à α. Par (1), $tst = s$ est la seule relation.