

Groupe fondamental (Corrigé2.2)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 10 (Groupe fondamental d'une suspension)

Par définition, on peut écrire $\Sigma X = C^+X \cup C^-X$, où

$$C^+X := X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] / X \times \{0\}, \quad C^-X := X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] / X \times \{1\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on va noter C_ε^+X (resp. C_ε^-X , X_ε) un ε -voisinage ouvert de C^+X (resp. C^-X , X). Comme $X_\varepsilon = C_\varepsilon^+X \cap C_\varepsilon^-X$ est connexe, on peut appliquer le théorème de Van Kampen (avec un point base $x \in X$) :

$$\pi_1(\Sigma X, x) = \pi_1(C_\varepsilon^+X, x) *_{\pi_1(X_\varepsilon, x)} \pi_1(C_\varepsilon^-X, x),$$

qui est trivial parce que C_ε^+X et C_ε^-X sont contractiles (Exercice 4 du TD1).

Exercice 11 (Groupe fondamental de la bouteille de Klein)

1. Dans $[0, 1] \times [0, 1]$, M_1 est le ruban de Moebius délimité par les inégalités $1 \leq 2x + y \leq 2$. Et M_2 est le complémentaire de l'intérieur de M_1 .
2. Notons K la bouteille de Klein. On va écrire le théorème de Van Kampen pour des ε -voisinages M_1^ε et M_2^ε de M_1 et M_2 respectivement. En effet, $M_1^\varepsilon \cap M_2^\varepsilon$ est un ouvert connexe, et pour $x \in M_1 \cap M_2$ on obtient

$$\pi_1(M_1^\varepsilon, x) *_{\pi_1(M_1^\varepsilon \cap M_2^\varepsilon, x)} \pi_1(M_2^\varepsilon, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(K, x).$$

Par l'Exercice 11 du TD1 (cela ne change rien qu'ils soient pris sans bord), les rubans de Moebius M_1^ε et M_2^ε sont homotopes à des cercles, donc de groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$. Aussi, $M_1^\varepsilon \cap M_2^\varepsilon$ est un ruban (classique), qui est aussi homotope à un cercle. Et $\pi_1(M_1^\varepsilon \cap M_2^\varepsilon, x) \rightarrow \pi_1(M_1^\varepsilon, x)$ correspond à l'inclusion $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. On en déduit

$$\pi_1(K, x) = \langle a, b \mid aa = bb \rangle.$$

3. L'abélianisé de $\pi_1(K, x) = \langle a, b \mid a^2b^{-2} \rangle$ est isomorphe à

$$\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b / \langle 2a - 2b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Or le groupe fondamental d'un tore est abélien, isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Exercice 12 (Groupe fondamental d'une variété épointée)

Par récurrence, il suffit de considérer le cas $n = 1$, et on note x au lieu de x_1 le point à enlever. On choisit une petite boule D^N d'origine x . Alors on a

$$V = (V \setminus \{x\}) \cup D^N, \quad (V \setminus \{x\}) \cap D^N = D^N \setminus \{x\} \sim S^{N-1}.$$

Comme la dimension de V est $N \geq 3$, S^{N-1} est connexe et simplement connexe, donc on peut conclure en utilisant le théorème de Van Kampen (pour $y \in D^N \setminus \{x\}$) :

$$\pi_1(V \setminus \{x\}, y) = \pi_1(V \setminus \{x\}, y) *_{\pi_1(D^N \setminus \{x\}, y)} \pi_1(D^N, y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(V, y).$$

Exercice 13 (Groupe fondamental des surfaces)

1. On se reportera au cours pour la construction de S_g via un polygone de $4g$ côtés et l'attachement d'une 2-cellule. On sait au final que l'on a

$$\pi_1(S_g, z_0) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

2. En utilisant encore la construction par le polygone, on voit que l'effet homotopique d'enlever un premier point est de faire disparaître la 2-cellule; et l'effet d'enlever ensuite un point supplémentaire est de rajouter chaque fois une diagonale de plus au polygone. Par conséquent on en déduit (si $n \geq 1$), pour $z_0 \in S_g \setminus X$:

$$\pi_1(S_g \setminus X, z_0) \simeq \pi_1\left(\bigvee^{2g+n-1} S^1, z_0\right) = \mathbb{F}_{2g+n-1},$$

le groupe libre à $(2g + n - 1)$ générateurs.

3. On utilise le fait général suivant : dans un espace séparé, à équivalence d'homotopie près, identifier m points distincts qui sont dans la même composante connexe par arcs revient à faire le bouquet avec $(m - 1)$ cercles. Par conséquent, on a (si $m \geq 1$) :

$$\pi_1(S_g/Y, z_0) = \pi_1\left(S_g \vee \bigvee^{m-1} S^1, z_0\right) = \pi_1(S_g, z_0) * \mathbb{F}_{m-1},$$

ou plus concrètement,

$$\pi_1(S_g/Y, z_0) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_{m-1} \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

4. En combinant (2) et (3), on conclut ($n, m \geq 1$) :

$$\pi_1((S_g \setminus X)/Y, z_0) = \pi_1\left(\bigvee^{2g+n+m-2} S^1, z_0\right) = \mathbb{F}_{2g+n+m-2}.$$

Exercice 14 (Groupe fondamental des espaces projectifs)

On garde les notations de l'Exercice 4 du TD1. D'abord, $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2 donc simplement connexe. Ensuite, pour $n \geq 1$, on utilise

$$\mathbb{C}P^{n+1} = \mathbb{C}P^n \cup_p D^{2n+2}$$

(on parle de structure de CW-complexe). Comme on a $2n + 2 > 2$, on en déduit par récurrence immédiate

$$\{1\} = \pi_1(\mathbb{C}P^n, x) = \pi_1(\mathbb{C}P^{n+1}, x).$$

La droite projective $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à S^1 , donc de groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$. Puis on utilise de nouveau, pour $n \geq 1$, la relation

$$\mathbb{R}P^{n+1} = \mathbb{R}P^n \cup_p D^{n+1}. \quad (1)$$

Pour $n = 1$, elle nous donne la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \langle [p] \rangle = 2\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2, x) \rightarrow 0.$$

Et pour $n \geq 2$, (1) implique, par récurrence,

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}P^n, x) = \pi_1(\mathbb{R}P^{n+1}, x).$$

Exercice 15 (Homotopies de lacets à extrémités fixées ou non)

1. Le sens direct est évident. Pour la réciproque, soit $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie reliant γ à un lacet constant (qui est $H(\cdot, 1)$). On définit alors la nouvelle homotopie $\tilde{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ qui vaut

$$\tilde{H}(s, t) = \begin{cases} H(\bar{0}, (1 - 4s) + 4st) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4, \\ H(2s - 1/2, t) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 3/4, \\ H(\bar{0}, 4(1 - s)t + 4(s - 3/4)) & \text{si } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Elle relie $\tilde{\gamma} = H(\bar{0}, \cdot)^{-1} \gamma H(\bar{0}, \cdot)$ au lacet constant $H(\cdot, 1)$, en laissant l'extrémité $x = H(\bar{0}, 1)$ fixe : $\tilde{\gamma}$ est de classe triviale dans $\pi_1(X, x)$. Par propriété de changement de point-base (x et $y = H(\bar{0}, 0)$ sont dans la même composante connexe par arcs), γ est alors trivial dans $\pi_1(X, y)$.

2. On représente ab par le lacet γ_0 qui fait un tour de vitesse uniforme pendant une moitié du temps ($s \in [0, 1/2]$) sur le premier cercle, et un tour de vitesse uniforme pendant l'autre moitié du temps ($s \in [1/2, 1]$) sur le deuxième cercle. On déforme ce lacet (c'est ce que fait une homotopie) de la manière suivante : pour $t \in [0, 1]$ le paramètre de l'homotopie, le lacet γ_t est défini par :

$$\gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma_0(s + \frac{t}{2}) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 - t/2; \\ \gamma_0(s - 1 + \frac{t}{2}) & \text{si } 1 - t/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que γ_1 représente ba . Comme le groupe fondamental de $S^1 \vee S^1$ est le groupe libre sur deux générateurs $\langle a, b \rangle$, on a bien $ab \neq ba$ dans $\pi_1(S^1 \vee S^1, x)$. Donc par définition, ab et ba ne sont pas homotopes via une homotopie à extrémités fixées.

Exercice 16 (Groupe fondamental d'un graphe fini)

- 1.
2. En toute généralité, une paire de CW-complexes est une cofibration, c'est-à-dire qu'elle satisfait la propriété d'extension d'homotopie. Pour une paire de CW-complexes (X, A) , si A est contractile, alors on peut contracter A sans changer le type d'homotopie de $X : X \rightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.
3. S'il existe une arête dont les extrémités sont distinctes, par (2), on peut l'écraser sans changer le type d'homotopie ; et le nombre d'arêtes et le nombre de sommets sont décrémentés de 1. En réitérant (2) et parce que Γ est connexe, à la fin, il reste un sommet et $c(\Gamma) = 1 + \#\{\text{Arêtes}\} - \#\{\text{Sommets}\}$ arêtes. Alors le type d'homotopie de Γ est le même qu'un bouquet de $c(\Gamma)$ cercles : son groupe fondamental est le groupe libre à $c(\Gamma)$ générateurs.

Exercice 17 (Espaces topologiques à groupe fondamental donné)

Soit $\langle g_1, \dots, g_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ une présentation de G , où r_j est un mot en les lettres $g_i^{\pm 1}$. On prend un bouquet de n cercles correspondant aux générateurs. Puis on attache m 2-cellules correspondant aux relations r_j .

Exercice 18 (Groupe fondamental des groupes linéaires de taille 2)

1. Il suffit d'observer qu'une matrice de $SU_2(\mathbb{C})$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
2. Comme S^3 est simplement connexe, $\pi_1(SU_2(\mathbb{C}), 1)$ est trivial. Pour $U_2(\mathbb{C})$, on remarque que la suite exacte courte

$$1 \rightarrow SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow U_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} S^1 \rightarrow 1$$

admet une section : $S^1 \rightarrow U_2(\mathbb{C})$, qui envoie $e^{i\theta}$ vers $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $U_2(\mathbb{C})$ est en fait un produit semi-direct $U_2(\mathbb{C}) = SU_2(\mathbb{C}) \rtimes S^1$.

En particulier, on a un homéomorphisme $U_2(\mathbb{C}) \simeq SU_2(\mathbb{C}) \times S^1$ (mais attention, ce n'est pas un isomorphisme de groupes de Lie). On obtient alors $\pi_1(U_2(\mathbb{C}), 1) = \pi_1(S^1, \bar{0}) \simeq \mathbb{Z}$.

Enfin, on sait (Gram-Schmidt !) que $GL_2(\mathbb{C})$ se rétracte par déformation sur $U_2(\mathbb{C})$: son groupe fondamental est aussi isomorphe à $\mathbb{Z}$.

3. On a l'homéomorphisme suivant :
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & SO_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{array}$$
 . Donc $\pi_1(SO_2(\mathbb{R}), 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Comme $GL_2(\mathbb{R})_+$ est homotope à $SO_2(\mathbb{R})$ (encore Gram-Schmidt), son groupe fondamental est aussi isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pour $GL_2(\mathbb{R})_-$, il suffit de noter qu'il est homéomorphe à $GL_2(\mathbb{R})_+$ par multiplication par $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercices Additionnels

1. Pour le cercle à deux origines, on applique le théorème de Van Kampen aux ouverts obtenus en enlevant l'un et l'autre des deux points non séparés. Alors l'intersection est connexe et contractile : par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental du cercle à deux origines est le groupe libre à deux générateurs.
1. Le groupe fondamental de la droite à deux origines, que l'on va noter $D_.$, est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Une preuve de cette affirmation peut consister à recoller cette dernière avec un cercle (classique). L'intersection est homéomorphe à $\mathbb{R}$, contractile, et l'union homéomorphe au cercle à deux origines : le théorème de Van Kampen fournit alors

$$\pi_1(D_., x) * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Dès lors, $\pi_1(D_., x)$ est un groupe libre (par l'Exercice 9 du TD3) et en abélianisant on voit qu'il est de rang 1.

1. On peut aussi utiliser une déformation d'homotopie pour se ramener au groupe fondamental d'un cercle. Soient H^+ , H^- les demi-plans fermés supérieur et inférieur respectivement. On note L^+ , L^- les bords de H^+ , H^- , ainsi que O^+ , O^- les origines de L^+ , L^- , et x^+ , x^- les coordonnées de L^+ , L^- respectivement. Comme H^+ (resp. H^-) se rétracte par déformation sur L^+ (resp. L^-), on sait que le groupe fondamental de la droite à deux origines est isomorphe à celui de $H^+ \amalg H^- / \{x^+ \sim x^-, x \neq 0\}$. On remarque que l'inclusion $H^+ \setminus \{O^+\} \hookrightarrow H^+$ est une équivalence d'homotopie. Du coup, on observe

$$\pi_1(D_., x) = \pi_1\left(\left(H^+ \setminus \{O^+\}\right) \amalg \left(H^- \setminus \{O^-\}\right) / \{x^+ \sim x^-; x \neq 0\}, x\right).$$

Or l'espace à droite est $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

2. C'est le groupe libre sur l'ensemble indexant les copies de S^1 . En effet, l'ensemble des générateurs du groupe libre engendre bien le groupe fondamental désiré puisque tout lacet se trouve dans un bouquet fini (observer que ce n'est pas le cas avec les exemples de l'Exercice 3 du TD1). Enfin, toute éventuelle relation ferait intervenir un nombre fini de générateurs, et on se ramène alors aussi au cas du bouquet fini.