

Groupe fondamental (Corrigé2.1)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 1 (Invariance de la dimension, résultat partiel)

En enlevant un point de $\mathbb{R}^2$, on obtient un espace homotope à S^1 , qui n'est pas simplement connexe. Par contre, en enlevant n'importe quel point de $\mathbb{R}^n$, pour $n > 2$, on obtient un espace homotope à S^{n-1} qui est simplement connexe.

Exercice 2 (Groupe fondamental des groupes topologiques)

1. L'égalité de deux produits s'obtient de la façon suivante :

$$x \bullet y = (x * 1) \bullet (1 * y) = (x \bullet 1) * (1 \bullet y) = x * y.$$

La commutativité :

$$x \bullet y = (1 * x) \bullet (y * 1) = (1 \bullet y) * (x \bullet 1) = y * x = y \bullet x.$$

L'associativité :

$$(x \bullet y) \bullet z = (x \bullet y) \bullet (1 \bullet z) = (x \bullet 1) \bullet (y \bullet z) = x \bullet (y \bullet z).$$

2. On considère deux lois de produit sur $\pi_1(G, 1)$ pour G un groupe topologique. La première est la loi usuelle pour un groupe fondamental, notée $\bullet$: on rappelle qu'elle provient de la « conjonction » de deux lacets. La seconde provient de la loi du groupe $\cdot$ sur G lui-même :

$$\begin{array}{ccc} * : C_{1,1}(G) \times C_{1,1}(G) & \rightarrow & C_{1,1}(G) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & (t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)) \end{array}.$$

On vérifie bien que $*$ respecte l'équivalence d'homotopie : si H est une homotopie (à extrémités fixées) entre α et α' , alors $H \cdot \beta$ est une homotopie entre $\alpha \cdot \beta$ et $\alpha' \cdot \beta$. Donc $*$ descend bien en un produit $\pi_1(G, 1) \times \pi_1(G, 1) \rightarrow \pi_1(G, 1)$, que l'on note encore $*$.

Par construction, $\bullet$ et $*$ satisfont les deux conditions de (1) : on en déduit la commutativité de $\pi_1(G, 1)$.

Exercice 3 (Revêtements et homéomorphismes locaux)

1.(a)

- 1.(b) Pour tout ¹ $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on considère le sous-ensemble de B suivant :

$$B_n := \{b \in B \mid \#p^{-1}(b) = n\}.$$

Par la définition de revêtement, on prouve facilement que B_n est ouvert pour n . Comme B est l'union disjointe des B_n , les B_n sont aussi fermés. Par connexité de B , on trouve que $B = B_n$ pour un certain n .

2.

1. à proprement parler, il faudrait ne pas confondre les infinis $\aleph_0, \aleph_1, \dots$

Exercice 4 (Effet des revêtements sur le groupe fondamental)

Cela découle de la propriété de relèvement d'homotopie.

Exercice 5 (Groupe fondamental des espaces fonctionnels)

C'est une conséquence immédiate de l'Exercice 17 du TD 1.

Exercice 6 (Degré d'une application $S^1 \rightarrow S^1$)

- 1.(a) Par l'isomorphisme de changement de point de base, on sait que les groupes images sont isomorphes. Pour identifier tout à fait cet isomorphisme, on peut procéder comme dans la preuve de la proposition mentionnée.
- 1.(b) Il suffit d'observer le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(S^1, f(x)) & & \\
 \downarrow \phi_\gamma & \searrow \text{deg} & \swarrow \text{deg} & & \downarrow \phi_{f \circ \gamma} \\
 & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n_x} \xrightarrow{\times n_y} & \mathbb{Z} \\
 & \swarrow \text{deg} & & \searrow \text{deg} & \\
 \pi_1(S^1, y) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(S^1, f(y)) & &
 \end{array}$$

2. C'est une conséquence immédiate du diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{\pi_1(g \circ f)} & \pi_1(S^1, g(f(x))) & & \\
 \downarrow \text{deg} & \searrow \pi_1(f) & \swarrow \pi_1(g) & & \downarrow \text{deg} \\
 & & \pi_1(S^1, f(x)) & & \\
 & \searrow \text{deg} & \downarrow \text{deg} & & \\
 & & \mathbb{Z} & & \\
 \downarrow \text{deg} & \swarrow \times \text{deg}(f) & \searrow \times \text{deg}(g) & & \downarrow \text{deg} \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times \text{deg}(g \circ f)} & \mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

3. On remarque d'abord qu'une rotation est de degré 1, et homotope à l'identité, donc on peut composer par une rotation convenable à gauche ou à droite autant qu'on veut sans changer la question. Dans la suite, on va utiliser constamment $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Si on se donne deux endomorphismes homotopes $f \sim g$ de S^1 , quitte à composer avec certaines rotations, on peut supposer $f(0) = g(0) = 0$. Soit $H : S^1 \times I \rightarrow S^1$ une homotopie entre f et g : on peut définir une autre homotopie entre f et g et qui fixera le point base 0 en posant

$$\begin{aligned}
 H' : S^1 \times I &\rightarrow S^1 \\
 (x, t) &\mapsto H(x, t) - H(0, t) \mod \mathbb{Z} .
 \end{aligned}$$

Par conséquent, f, g représentent le même élément dans $\pi_1(S^1, 0)$, et ont donc même degré. Réciproquement, soient f, g deux endomorphismes de S^1 de même degré. Quitte à composer avec certaines rotations, on peut supposer $f(0) = g(0) = 0$. Sous cette hypothèse, la condition $\text{deg}(f) = \text{deg}(g)$ implique que f et g représentent le même élément dans $\pi_1(S^1, 0)$. Par la définition du groupe fondamental, on obtient une homotopie (fixant $0 \in S^1$) entre f et g .

4. Si f n'est pas surjective, alors f se factorise par $S^1 \setminus \{x\}$, qui est contractile. Donc f est homotopiquement triviale. En particulier, elle est de degré nul.

5. On considère un relèvement $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f . Quitte à composer par des rotations, on peut supposer $\tilde{f}(0) = 0$. Ce qu'il reste à faire est un argument élémentaire en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7 (Théorème de Borsuk-Ulam)

1. On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - f(-x)$.

- 2.(a) On considère un relèvement

$$\tilde{k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

de k . L'hypothèse $k(x) = -k(-x)$ pour tout x est équivalente à la condition suivante : pour tout $x \in S^2$, il existe un entier $m_x \in \mathbb{Z}$, tel que

$$\tilde{k}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \tilde{k}(x) + \frac{2m_x + 1}{2}.$$

Par continuité de $\tilde{k}$, on trouve que m_x est en fait indépendant de x : il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout x on a

$$\tilde{k}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \tilde{k}(x) + \frac{2m + 1}{2}.$$

On en déduit

$$\tilde{k}(1) = \tilde{k}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2m + 1}{2} = \tilde{k}(0) + (2m + 1).$$

Dès lors, $\deg(k) = \tilde{k}(1) - \tilde{k}(0) = 2m + 1$ est impair.

- 2.(b) Grâce à l'hypothèse $f(x) \neq f(-x)$, on peut construire l'application continue suivante :

$$\begin{aligned} g : S^2 &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}. \end{aligned}$$

Il est immédiat que g vérifie bien l'équation $g(-x) = -g(x)$.

- 2.(c) Comme ι se prolonge en une application de $S^1 \rightarrow D^2$, elle est homotopiquement triviale. Donc $g \circ \iota$ l'est aussi. Par contre, $k := g \circ \iota$ vérifie bien l'équation $k(-x) = -k(x)$: par 2.(a), k est de degré impair. En particulier, k n'est pas homotopiquement triviale. D'où une contradiction : cela affirme l'existence de x vérifiant $f(x) = f(-x)$.

Exercice 8 (Théorème de Lusternik et Schnirelmann)

On applique le théorème de Borsuk-Ulam à l'application continue suivante :

$$\begin{aligned} f : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (f_A(x), f_B(x)) \end{aligned}$$

où on a posé (pour une distance fixée d sur S^2)

$$f_A(x) := \min_{y \in A} d(x, y), \quad f_B(x) := \min_{y \in B} d(x, y).$$

Par le théorème de Borsuk-Ulam, il existe un point $x \in S^2$ vérifiant $f_A(-x) = f_A(x)$ et $f_B(-x) = f_B(x)$.

- Si $f_A(x) = f_A(-x) = 0$, alors comme A est fermé, x appartient à A .
- Si $f_B(x) = f_B(-x) = 0$, alors de même x appartient à B .
- Si $f_A(x) = f_A(-x) > 0$ et $f_B(x) = f_B(-x) > 0$, alors x et $-x$ ne sont pas dans $A \cup B$: ils sont tous deux dans C .

Exercice 9 (Une formule analytique pour le degré)

0.1.

2.(a) C'est une technique standard. Un argument non constructif : on peut faire une convolution à noyau C^∞ à support compact suffisamment concentré à l'origine.

Un argument constructif et élémentaire est aussi possible, par exemple : pour un lacet γ donné, on le découpe suffisamment tel que chaque morceau est contenu dans un petit disque ne contenant pas l'origine. On remplace ce morceau simplement par le segment reliant le point de départ de ce morceau et celui d'arrivée. Et puis, on lissifie chaque point de découpage par un petit arc convenable.

2.(b) Comme on l'a vu en 1.(c), l'indice est un invariant homotopique : il suffit de montrer que l'indice de lacet $t \mapsto e^{2i\pi nt}$ est n .