

TD : feuille n°2 Groupe fondamental.

Les exercices marqués du symbole \clubsuit sont des exercices à faire en priorité. Ce sont des exercices classiques. Les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

1 Groupe fondamental, degré.

\clubsuit Exercice 1. Invariance de la dimension (résultat partiel)

Montrer que \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^n pour $n \neq 2$.

Exercice 2. Groupe fondamental des groupes topologiques.

1. **Principe de Eckmann-Hilton.** Soit X un ensemble. On suppose que X est équipé de deux produits, c'est-à-dire de deux applications $\bullet : X \times X \rightarrow X$ et $*$: $X \times X \rightarrow X$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) Il existe un élément $1 \in X$ qui est une unité à la fois pour \bullet et pour $*$.
- (ii) l'application $*$: $X \times X \rightarrow X$ est compatible avec l'opération \bullet , c'est-à-dire :

$$(x \bullet x') * (y \bullet y') = (x * y) \bullet (x' * y') .$$

Montrez que les deux applications produits sont égales, et qu'elles définissent une structure de monoïde commutatif sur X (c'est à dire qu'on a associativité et commutativité du produit).

2. Montrez que le groupe fondamental d'un groupe topologique (i.e. un groupe dont la multiplication et la fonction inverse sont continues) est abélien.

\clubsuit Exercice 3. Revêtements et homéomorphismes locaux

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme local si tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $f(U)$ est un ouvert de Y et la restriction $f : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme¹.

1. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement.
 - (a) Montrez que p est un homéomorphisme local.
 - (b) On suppose B connexe. Montrez que toutes les fibres de p ont même cardinal.
2. (a) Soit $p : E \rightarrow B$ un homéomorphisme local dont toutes les fibres sont de même cardinal fini. On suppose que E est séparé. Montrez que p est un revêtement.
 - (b) Donnez un contre-exemple à la question précédente si les fibres ne sont pas de cardinal fini. De même, donnez un contre-exemple si E n'est pas séparé.

\clubsuit Exercice 4. Effet des revêtements sur le groupe fondamental

Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement. Montrez que pour tout $x \in E$, l'application $\pi_1(p) : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(B, p(x))$ est injective.

Exercice 5. Groupe fondamental des espaces fonctionnels.

Soit Y un espace métrique et $y \in Y$. On note $\mathcal{C}(S^1, Y)$ l'espace des fonctions continues de S^1 dans Y , muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit ΩY le sous-espace de $\mathcal{C}(S^1, Y)$ formé des applications continues f telles que $f(1) = y$. Montrez qu'on a une bijection entre $\pi_0(\Omega Y)$ et $\pi_1(Y, y)$.

1. Par exemple, une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et dont la différentielle ne s'annule en aucun point est un homéomorphisme local, grâce au théorème d'inversion locale.

Exercice 6. Degré d'une application $S^1 \rightarrow S^1$.

1. Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ une application continue et soit $x \in S^1$. On note $n_x \in \mathbb{Z}$ le nombre tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(S^1, f(x)) \\ \text{deg} \downarrow \simeq & & \text{deg} \downarrow \simeq \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n_x} & \mathbb{Z} \end{array}$$

- (a) Montrez que pour tout chemin γ d'origine x et d'extrémité y , on a un diagramme commutatif de morphismes de groupes (où $\phi_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$) :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{\phi_\gamma} & \pi_1(S^1, y) \\ & \searrow \text{deg} & \swarrow \text{deg} \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

- (b) Montrez que le nombre n_x est indépendant de x .

Le nombre n_x est appelé *le degré de f* , et on le note $\text{deg}(f)$.

2. Montrez que $\text{deg}(g \circ f) = \text{deg}(g) \circ \text{deg}(f)$.
3. Montrez que deux applications sont homotopes si et seulement si elles ont même degré.
4. Montrez que si $\text{deg}(f) \neq 0$, alors f est surjective. Montrez que la réciproque est fausse.
5. Montrez que si f est injective alors $\text{deg}(f) = \pm 1$. Montrez que la réciproque est fausse.

Exercice 7. Théorème de Borsuk-Ulam

Le théorème de Borsuk-Ulam affirme que pour toute fonction continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. On se propose de montrer ce théorème pour $n = 1$ et $n = 2$.

1. Montrez le cas $n = 1$.
2. On suppose maintenant $n = 2$. On procède par l'absurde : on suppose qu'on a une application $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que pour tout x , $f(x) \neq f(-x)$.
 - (a) Montrez que si $k : S^1 \rightarrow S^1$ vérifie $k(-x) = -k(x)$ pour tout x alors le degré de k est impair.
 - (b) Construire une application $g : S^2 \rightarrow S^1$ telle que pour tout x , $g(-x) = -g(x)$.
 - (c) Soit $\iota : S^1 \hookrightarrow S^2$ l'inclusion de S^1 comme équateur de S^2 . Montrez que ι est homotopiquement triviale, alors que $g \circ \iota$ ne l'est pas. Conclure.

Exercice 8. Théorème de Lusternik et Schnirelmann

Soient A, B, C trois fermés de S^2 dont la réunion recouvre S^2 . Montrez que l'un des fermés contient deux points antipodaux.

Exercice 9. Une formule analytique pour le degré.

0. **Rappels d'analyse complexe.** Soit U un ouvert de \mathbb{C} . On rappelle que si $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un chemin continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, l'intégrale de F le long de γ est :

$$\int_\gamma F(z)dz = \int_0^1 F(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Soit $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique complexe. Rappelez pourquoi F admet localement une primitive, et pourquoi si F admet une primitive sur U alors pour tout lacet γ d'image dans U on a $\int_\gamma F(z)dz = 0$.

1. **Une démonstration de l'invariance homotopique de l'intégrale.** Soient γ_0 et γ_1 deux chemins \mathcal{C}^1 de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ homotopes par une homotopie H à extrémités fixées.
 - (a) Supposons que H est de la forme $H(s, t) = s\gamma_0(t) + (1 - s)\gamma_1(t)$. En découpant $[0, 1] \times [0, 1]$ en petits carrés, montrez que $\int_{\gamma_0} F(z)dz = \int_{\gamma_1} F(z)dz$.

- (b) L'application H est maintenant une application continue quelconque. Montrez qu'on peut trouver des chemins \mathcal{C}^1 , $\mu_0 = \gamma_0$, $\mu_1, \dots, \mu_n = \gamma_1$, tels que les fonctions suivantes sont des homotopies dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$:

$$h_k(s, t) = s\mu_k(t) + (1 - s)\mu_{k+1}(t).$$

- (c) Conclure que $\int_{\gamma_0} F(z)dz = \int_{\gamma_1} F(z)dz$.

2. **Indice et degré.** Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est un lacet \mathcal{C}^1 (i.e. $\gamma(0) = \gamma(1)$) et si $0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$, on définit l'indice de γ par rapport à 0 par la formule :

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z} dz.$$

- (a) Montrez que tout lacet continu de S^1 est homotope par une homotopie pointée à un lacet \mathcal{C}^∞ de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 (b) Montrez que l'indice d'un lacet γ par rapport à 0 est égal au degré du lacet $\gamma/|\gamma|$. (Remarque : en particulier, cela prouve que l'indice est toujours un nombre entier).

2 Groupe fondamental et théorème de Van Kampen.

✚Exercice 10. Groupe fondamental d'une suspension.

Soit X un espace topologique et ΣX sa suspension (quotient de $X \times [0, 1]$ en écrasant $X \times \{0\}$ d'une part et $X \times \{1\}$ d'autre part). Si X est connexe par arcs, montrez que ΣX est simplement connexe. Donnez un contre-exemple si X n'est pas connexe par arcs.

Exercice 11. Groupe fondamental de la bouteille de Klein

La bouteille de Klein est la surface topologique obtenue comme quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) = (1 - x, 1)$ et $(0, y) = (1, y)$ (faites un dessin).

- Montrez que la bouteille de Klein est homéomorphe à la réunion de deux rubans de Moebius collés le long de leur bord (c'est à dire au quotient de $M_1 \sqcup M_2$ par l'identification $x = \phi(x)$, où ϕ est l'application identité de ∂M_1 dans ∂M_2).
- Montrez que le groupe fondamental de M est le quotient d'un groupe libre à deux générateurs a et b , quotienté par la relation $aa = bb$.
- Calculez l'abélianisé de ce groupe. Montrez que la bouteille de Klein n'a pas le même type d'homotopie que le tore.

Exercice 12. Groupe fondamental d'une variété épointée.

Soit V une variété topologique de dimension $N \geq 3$. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de points distincts de V . Montrez que l'inclusion $V \setminus X \hookrightarrow V$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.

Exercice 13. Groupe fondamental des surfaces.

Soit S_g la surface de Riemann orientable de genre g . Soient $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g .

- Rappelez le calcul du groupe fondamental de S_g .
- Calculez le groupe fondamental de $S_g \setminus X$.
- Calculez le groupe fondamental du quotient S_g/Y .
- Calculez le groupe fondamental de $(S_g \setminus X)/Y$.

✚Exercice 14. Groupe fondamental des espaces projectifs.

Calculez le groupe fondamental des espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$ et $\mathbb{C}P^n$ pour tout n .

Exercice 15. Homotopies de lacets à extrémités fixées ou non.

1. Soit γ un lacet de X . Montrez que γ est homotope à un lacet constant par une homotopie à extrémités fixées si et seulement si γ est homotope à un lacet constant par une homotopie quelconque.
2. Considérons le lacet $ab \in S^1 \vee S^1$ (a désigne le générateur du π_1 associé à la première copie de S^1 et b celui associé à la deuxième copie de S^1). Montrez que ab est homotope à ba via une homotopie non pointée, mais que ces deux lacets ne sont pas homotopes via une homotopie à extrémités fixées.

☛ Exercice 16. Groupe fondamental d'un graphe fini.

Un graphe topologique est un espace topologique Γ muni de la structure suivante.

- Un ensemble discret \mathcal{S} de points de Γ (ses sommets),
- Un ensemble fonctions $f_\alpha : \partial I_\alpha \rightarrow \mathcal{S}$, où les I_α sont des copies du segment $[0, 1]$, (les applications d'attachement des arêtes)
- Un homéomorphisme

$$\Phi : \mathcal{S} \cup_{\sqcup f_\alpha} \left(\bigsqcup_{\alpha \in J} I_\alpha \right) \xrightarrow{\approx} \Gamma .$$

Les images des I_α par Φ sont appelées les arêtes du graphe. (les arêtes sont des sous-espaces compacts de Γ , chaque arête contient un ou deux sommets du graphe : ses extrémités).

1. **Topologie des graphes.** Montrez qu'un graphe topologique est séparé. Montrez qu'un graphe topologique est compact si et seulement si il a un nombre fini d'arêtes et de sommets.
2. **Ecrasement d'une arête.** Soit A une arête d'un graphe topologique Γ .
 - (a) Montrez que l'inclusion $A \hookrightarrow \Gamma$ est une cofibration.
 - (b) On suppose que les deux extrémités de A sont distinctes. Montrez que l'application quotient $\Gamma \rightarrow \Gamma/A$ est une équivalence d'homotopie.
3. **Groupe fondamental.** Si Γ est un graphe topologique connexe fini, on note $c(\Gamma)$ la caractéristique d'Euler du graphe, c'est à dire la somme $1 + \#\{\text{Arêtes}\} - \#\{\text{Sommets}\}$. Montrez que le groupe fondamental d'un graphe fini Γ est un groupe libre à $c(\Gamma)$ générateurs.

☛ Exercice 17. Espaces topologiques à groupe fondamental donné

Soit G un groupe de présentation finie. Construisez un espace topologique dont le groupe fondamental est isomorphe à G .

☛ Exercice 18. Groupe fondamental des groupes linéaires de taille 2

1. Montrez que l'application $SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ qui à une matrice associe la première colonne de la matrice induit un homéomorphisme entre $SU_2(\mathbb{C})$ et S^3 .
2. Déduisez-en le groupe fondamental des groupes topologiques $SU_2(\mathbb{C})$, $U_2(\mathbb{C})$ et $GL_2(\mathbb{C})$.
3. Calculez le groupe fondamental de $SO_2(\mathbb{R})$, de $GL_2(\mathbb{R})_+$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant positif) et de $GL_2(\mathbb{R})_-$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant négatif).

3 Exercices additionnels

1. Calculez le groupe fondamental du cercle à deux origines, et (plus dur) de la droite à deux origines.
2. Calculez le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble quelconque de copies de S^1 .