Notions de base (Corrigé1.2)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 11 (Quelques exemples simples d'équivalences d'homotopie)

1. Voici le regroupement par type d'homotopie :
   - A, D, O, P, Q, R ;
   - B ;
   - C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z.
2. Il existe une rétraction par déformation de M vers S^1 donnée par contraction de la première coordonnée. Une homotopie $H : M \times I \to M$ entre l'identité de M et la contraction $\begin{array}{rccc}\pi : & M & \to & M \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}, y\right)\end{array}$ est donnée par :
$$H((x,y),t) = \left((1-t)(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}, y\right).$$
3. Rappelons que, avec une métrique euclidienne fixée, on peut appliquer le processus de Gram-Schmidt à une matrice inversible : on obtient une décomposition (qui est unique !) comme le produit d'une matrice orthogonale et une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont positifs. On a donc un homéomorphisme (mais pas un isomorphisme de groupes !) :
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} O_n(\mathbb{R}) \times B_n^+(\mathbb{R}),$$
où $B_n^+(\mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures à diagonale positive. Comme $B_n^+(\mathbb{R})$ est un corps convexe, il est contractile.
4. Il suffit de noter les deux faits évidents suivants :
   - la loi de composition vérifie $(f \times g) \circ (f' \times g') = (f \circ f') \times (g \circ g')$;
   - si H est une homotopie entre f et g, et H' est une homotopie entre f' et g', alors $H \times H'$ est une homotopie entre $f \times f'$ et $g \times g'$.

Exercice 12 (Type d'homotopie d'un complémentaire)

1. On écrit
$$\mathbb{R}^n \smallsetminus E = (\mathbb{R}^{n-k} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}^k \sim \mathbb{R}^{n-k} \smallsetminus \{0\} \sim S^{n-k-1},$$
où la première homotopie est donnée par la rétraction de la deuxième coordonnée (une rétraction par déformation forte) et la deuxième homotopie est donnée par rétraction de la direction de rayon (aussi une rétraction par déformation forte).
2. Par l'Exercice 1, la paire $(\mathbb{R}^n, \overline{C})$ est en fait homéomorphe à la paire $(\mathbb{R}^n, D^n)$.
3. Un exemple un peu trivial : pour X contractile et non réduit à un point, on prend $A = X$ et B un point de X.

Exercice 13 (Décomposition de S^n en anses)

Exercice 14 (Homotopies et cônes)

1. Supposons d'abord que telle F existe. Comme f se factorise par CX qui est un espace contractile, f est homotope à une application constante. Réciproquement, si f est homotope à une application constante, alors l'homotopie H entre f est l'application constante est une application (continue) $H : X \times I \to Y$ telle que $H|_{X\times\{0\}}$ est constante. Donc H se factorise en une application continue $F : CX \to Y$. L'application F ainsi construite nous convient.

2. On considère l'application $D^{n+1} \to CS^n$ qui associe à un point de D^{n+1} de module r de coordonnée sphérique généralisée θ le point (θ, r) dans CS^n. Elle est bien définie aussi pour $r = 0$. Elle est bijective, continue, donc un homéomorphisme parce que les deux espaces sont compacts et séparés.
3. On dispose d'une rétraction par déformation forte vers le sommet.

Exercice 15 (Cofibrations et prolongement des applications)

1.
2. Considérons Y le sous-espace $A \times [0,1] \cup X \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite. Les applications continues $f, g : A \to Y$ définies par

$$f(a) = (a, 0) \quad \text{et} \quad g(a) = (a, 1)$$

sont homotopes via $H(a,t) = (a,t)$.
Mais f admet un prolongement continu sur X grâce à $\widetilde{f} : x \mapsto (x, 0)$, alors que g n'en dispose pas. Supposons en effet que g admette un prolongement $\widetilde{g}$ continu sur X. Alors si on note U la boule ouverte centrée en $(0,1)$ de rayon $1/2$, $\widetilde{g}^{-1}(U)$ est un ouvert de $[0,1]$ contenant 0. Prenons donc $[0, \beta[\subseteq \widetilde{g}^{-1}(U)$. Comme l'image continue d'un connexe est connexe, $\widetilde{g}([0,\beta[)$ est inclus dans $(\{0\} \times [0,1]) \cap U$. Cela contredit $\widetilde{g}(a) = g(a) = (a,1)$ pour $a \in A \smallsetminus \{0\}$, et donc l'existence de $\widetilde{g}$.

Exercice 16 (Cofibration et recollement d'espaces)

Exercice 17 (Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels)

On rappelle que la *topologie de la convergence uniforme* ou la *topologie compacte-ouverte* est par définition la topologie engendrée par les ouverts de la forme suivante :

$$O_{K,U} := \{f \in \mathbb{C}(X,Y) \mid f(K) \subseteq U\}.$$

Elle est aussi la topologie sous-jacente de la métrique suivante :

$$d(f,g) := \max\big\{d_Y\big(f(x), g(x)\big) \;\big|\; x \in X\big\}.$$

L'exercice est complètement tautologique si on connaît le lemme suivant :
Soient X, Y comme dans l'énoncé. Une application $H : X \times I \to Y$ est continue si et seulement si l'application correspondante $G : I \to \mathbb{C}(X,Y)$ est continue.
La démonstration n'est pas totalement triviale mais standard (voir par exemple le paragraphe 5.2 du polycopié du cours de topologie de F.Paulin), et utilise le même type d'argument que pour l'Exercice 6.

Exercice 18 (Groupes de matrices)

- Groupes compacts : $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$.
- Groupes non compacts : $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$.
- Groupes connexes : $GL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$.
- Groupes non connexes : $GL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, ils ont deux composantes connexes.

Pour la connexité, par le même argument que dans l'Exercice 11 en utilisant le processus de Gram-Schmidt, il suffit de démontrer les connexités de $SO_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ et $SU_n(\mathbb{C})$. On montre le cas de $SO_n(\mathbb{R})$ par récurrence sur $n \geq 2$. On fait agir $SO_n(\mathbb{R})$ sur la sphère S^{n-1}. L'action est transitive, et le stabilisateur du point $(1, 0, \ldots, 0)$ est $SO_{n-1}(\mathbb{R})$. Donc on obtient une application de $SO_n(\mathbb{R})$ vers S^{n-1} dont toutes les fibres sont homéomorphes à $SO_{n-1}(\mathbb{R})$; on écrit souvent cela de la manière suivante :

$$SO_{n-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \to S^{n-1}.$$

Par la connexité des sphères et l'hypothèse de récurrence, on a bien la connexité de $SO_n(\mathbb{R})$.
Une construction analogue est disponible pour le groupe unitaire ou unitaire spécial (il agit cette

fois sur une sphère de dimension $2n-1$).

Exercice 19 (Un groupe topologique homotopiquement commutatif)

1. Le groupe $GL_\infty(\mathbb{R})$ est la limite inductive des $GL_n(\mathbb{R})$, et $GL_\infty(\mathbb{R}) \times GL_\infty(\mathbb{R})$ la limite inductive des $GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$. Comme les diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & GL_n(\mathbb{R}) \arrow[d] \\ GL_{n+1}(\mathbb{R}) \times GL_{n+1}(\mathbb{R}) \arrow[r] & GL_{n+1}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs, le diagramme suivant est commutatif pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{tikzcd} GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ GL_{n+1}(\mathbb{R}) \times GL_{n+1}(\mathbb{R}) \arrow[r] & GL_\infty(\mathbb{R}) \end{tikzcd} .$$

Par la propriété universelle de limite inductive (ou la définition de sa topologie), la multiplication de $GL_\infty(\mathbb{R})$ est continue. De même pour l'inverse.

2. L'application de déterminant

$$GL_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$$

est de même bien définie et continue. Donc pour montrer que $GL_\infty(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, il suffit de prouver la connexité de $GL_\infty^+(\mathbb{R})$. Mais c'est évident : chaque élément est en fait contenu dans un $GL_n(\mathbb{R})$, où il existe un chemin reliant cet élément au point identité et cela reste un chemin dans $GL_\infty(\mathbb{R})$.

3. On remarque d'abord qu'il suffit de démontrer que les deux inclusions suivantes sont homotopes :

$$i : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{array}, \qquad j : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \end{array}.$$

En effet, on a $f = \mu \circ (i \times j)$ et $g = \mu \circ (i \times i)$, où μ est l'application de multiplication de $GL_{2n}(\mathbb{R})$. Pour montrer $i \sim j$, on considère l'homotopie suivante :

$$H(A,t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot A & -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot A \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot I & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot I \end{pmatrix}.$$

Notons que l'on a $\det H(A,t) = \det(A) \neq 0$: H est une homotopie qui relie $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}$ dans $GL_{2n}(\mathbb{R}) \subseteq GL_\infty(\mathbb{R})$. De même, on peut construire une autre homotopie similaire qui relie $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

4. Le fait que $i \sim j$ démontré ci-dessus nous permet de déduire également que l'application

$$\begin{array}{ccc} f' = \mu \circ (j \times i) : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ (B,A) & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{array}$$

est homotope à

$$g = \mu \circ (i \times i) : (B,A) \mapsto \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si on note $s : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$ l'application « flip » qui échange les deux coordonnées, alors on a

$$g \sim f = f' \circ s \sim g \circ s.$$

C'est dire que l'application de multiplication est homotopiquement commutative dans $GL_\infty(\mathbb{R})$.