Notions de base (Corrigé1.1)

Topologie Algébrique ENS

Exercice 1 (Corps convexes)
1.(a)

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \inf\left\{\frac{1}{\lambda}\in]0,+\infty[\;\middle|\; \lambda x \in K\right\} \end{array}$$

D'abord, N est bien défini : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\mu > 0$ petit avec $\mu x \in K$ puisque 0 est dans l'intérieur de K. Dès lors, $\{\lambda^{-1} \in \mathbb{R}^+_* \mid \lambda x \in K\}$ est non vide et admet un inf ; et ce dernier est fini, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

(i) On remarque ensuite $N(0) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $N(x) = 0$. Cela signifie, puisque K est borné, que l'on a $x = 0$.

(ii) On va montrer l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ que l'on peut supposer tous deux non nuls. Comme K est compact, donc fermé, on a $\dfrac{x}{N(x)} \in K$ et $\dfrac{y}{N(y)} \in K$. Par convexité de K, on a alors

$$\frac{N(x)}{N(x)+N(y)}\frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)} = \frac{x+y}{N(x)+N(y)} \in K.$$

D'où l'inégalité $N(x) + N(y) \geq N(x + y)$.

Déduisons-en que N est lipschitzienne par rapport à la norme euclidienne $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. Comme K possède O dans son intérieur, il existe $r > 0$ telle que la boule $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$ est contenue dans K. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $r\frac{x}{|x|} \in B(0,r) \subseteq K$; et on a alors $N(x) \leq \frac{|x|}{r}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Grâce à l'inégalité triangulaire, on a

$$|N(x) - N(y)| \leq \max\big(N(x-y), N(y-x)\big) \leq \frac{|x-y|}{r}.$$

En particulier, N est continue.

1.(+) Pour $\mu \in \mathbb{R}^+$, on remarque $N(\mu x) = \mu N(x)$. De plus, si K est symétrique, on a alors $N(\mu x) = |\mu| N(x)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Avec (i) et (ii), N vérifie alors les trois axiomes de la norme.

1.(b) Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{N(x)}{|x|}x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Elle est continue (en 0, c'est équivalent à la continuité de N). De plus, on remarque que l'on a $N(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in K$: ainsi ϕ envoie K sur $B(0,1)$ et ∂K sur $\partial B(0,1) = S^1$.

Enfin l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{|x|}{N(x)}x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est un inverse continu de ϕ : ϕ réalise bien l'homéomorphisme désiré.

2. Parce que L est compact convexe, il est d'intérieur non vide dans l'espace affine qu'il engendre, disons V de dimension $m \leq n$ (L contient un tétraèdre $(a, a+v_1, \ldots, a+v_m)$ où les v_i constituent une base de l'espace vectoriel sous-jacent à V). Par translation, on peut supposer que 0 est dans l'intérieur de L (dans V). Alors on conclut par 1.(b).

Exercice 2 (Compactification d'Alexandroff)

1. On va vérifie tour à tour les trois axiomes d'une topologie.
   Tout d'abord $\varnothing$ est ouvert ; et comme $\varnothing$ est compact, X^+ est aussi ouvert.
   Considérons un ensemble fini d'ouverts de X^+. Si tous contiennent ∞, alors l'union finie de leur complémentaire est compacte, donc leur intersection est ouverte. Sinon, l'un d'eux est un ouvert de X et leur intersection s'obtient en retirant des compacts (en nombre fini) à ce dernier, donc reste ouverte.
   Enfin, prenons une collection quelconque d'ouverts de X^+. Si aucun des ouverts considérés ne contient ∞, alors leur union est encore un ouvert de X, donc de X^+. Sinon, leur complémentaire est une intersection de fermés et de compacts (avec au moins un compact), donc est compact : leur union est ouverte dans X^+.
2. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X^+. Il existe $U_\infty \in \mathcal{U}$ contenant ∞ : son complémentaire K_∞ est compact. Il existe alors un $\mathcal{U}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{U}$ fini recouvrant K_∞. D'où la compactité de X^+.
   L'inclusion $\iota : X \to X^+ \smallsetminus \{\infty\}$ est une bijection ensembliste et la topologie induite sur $X^+ \smallsetminus \{\infty\}$ est la même que celle de X : ι est un homéomorphisme.
3. On note $\mathcal{T}_{\text{Alex}}$ la topologie d'Alexandroff sur X^+. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur X^+ vérifiant :
   (a) X^+ est compact,
   (b) $\mathrm{id} : X \hookrightarrow X^+ \smallsetminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme.
   Par (b), les ouverts de $\mathcal{T}$ sont dans
   $$\{U,\ U \cup \{\infty\} \mid U \text{ ouvert de } X\}.$$
   De plus, si $\infty \in V \in \mathcal{T}$, alors $X^+ \smallsetminus V \subseteq X^+ \smallsetminus \{V\}$ est un fermé, donc compact dans X. On a ainsi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{Alex}}$. En particulier, l'identité $(X^+, \mathcal{T}_{\text{Alex}}) \to (X^+, \mathcal{T})$ est continue. Comme $(X^+, \mathcal{T}_{\text{Alex}})$ est compact et $(X^+, \mathcal{T})$ est séparé, c'est un homéomorphisme : $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{Alex}}$.
4. Par le résultat de la question 3, il suffit de voir que l'on peut prendre un point distingué ∞ de S^n vérifiant $S^n \smallsetminus \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^n$. En prenant $\infty =$ pôle nord, la projection stéréographique permet de conclure.

Exercice 3 (Bouquet d'espaces)

1. On rappelle que $X \vee X'$ est par définition l'espace quotient de $X \times \{x'\} \sqcup \{x\} \times X'$ par la relation $(x, x') \sim (x, x')$. On dispose alors d'une bijection naturelle
   $$X \vee X' \xrightarrow{\sim} X \times \{x'\} \cup \{x\} \times X' \subseteq X \times X',$$
   dont on vérifie facilement que c'est un homéomorphisme.
2. D'abord, remarquons que $B = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} S^1_i$ n'est pas compact puisqu'il admet $(S^1_i)_{i \in \mathbb{N}}$ comme recouvrement minimal. Par contre, $P = (S^1)^{\mathbb{N}}$ est compact par Tychonoff, de même que son sous-espace fermé Y : dès lors, B et Y ne sont pas homéomorphes.
   De même, la boucle d'oreille hawaïenne $H \subseteq \mathbb{R}^2$ est compacte : tout recouvrement ouvert contient un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $H \smallsetminus U$ est alors un fermé d'un $\bigvee_{\text{fini}} S^1$. En particulier, H non plus n'est pas homéomorphe à B.

Exercice 4 (Espaces projectifs)

1. C'est trivial pour $\mathbb{R}P^1$. Pour $\mathbb{C}P^1$, on remarque que $\mathbb{C}P^1$ et S^2 sont tous deux la compactification d'Alexandroff de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$(voir (3) de l'Exercice 2).
2. L'homéomorphisme $(\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}^* \simeq S^n/\{\pm 1\}$ est évident parce que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$ est représentable par un point en S^n. Dans le cas complexe, on utilise que tout vecteur

de $\mathbb{C}^{n+1}$ est représentable par un point dans S^{2n+1}, et que la relation d'équivalence venant des homothéthies se réduit sur S^{2n+1} en la relation d'équivalence donnée par l'action de S^1.

3.4.

Exercice 5 (Tore)

On écrit (a) pour $S^1 \times S^1$, (b) pour $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, etc.
Les homéomorphismes $T \simeq (b)$ et $(a) \simeq (c)$ sont évidents. Puis, comme $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, il suffit d'établir un homéomorphisme $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui est facile (on peut utiliser l'application exponentielle.)

Exercice 6 (Produit et recollement)

L'application tautologique $X \times Z \coprod X' \times Z \to (X \coprod X') \times Z$ est un homéomorphisme et induit le diagramme suivant, où la flèche du bas est une bijection (ensembliste !).

$$\begin{tikzcd}
X \times Z \coprod X' \times Z \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "q"] & (X \coprod X') \times Z \arrow[d, "p\times\mathrm{id}"] \\
(X \times Z) \cup_{f\times\mathrm{id}, f'\times\mathrm{id}} (X' \times Z) \arrow[r] & (X \cup_{f,f'} X') \times Z
\end{tikzcd}$$

Pour vérifier que cette dernière est un homéomorphisme, on va voir que la flèche de droite $p \times \mathrm{id}$ est bien une projection topologique (q, à gauche, l'est naturellement). Pour cela, on va vérifier la propriété universelle du quotient : pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(X \coprod X') \times Z \arrow[r, "p\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "h"'] & (X \cup_{f,f'} X') \times Z \arrow[d, "g"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

si h est continue, alors g aussi.
Soient pour cela U un ouvert de Y et $(x, z) \in g^{-1}(U)$. On relève x en $\widetilde{x} \in X \coprod X'$ et on a $h(\widetilde{x}, z) \in U$. Parce que Z est localement compact, il existe un voisinage compact K de z vérifiant $h\big(\{\widetilde{x}\} \times K\big) \subseteq U$. On considère alors

$$V = \big\{x' \in X \cup_{f,f'} X' \mid g\big(\{x'\} \times K\big) \subseteq U\big\} \ni x.$$

On veut voir que V est ouvert, c'est-à-dire que

$$p^{-1}(V) = \big\{\widetilde{x}' \in X \coprod X' \mid h\big(\{\widetilde{x}'\} \times K\big) = g\big(\{p(\widetilde{x}')\} \times K\big) \subseteq U\big\}$$

est ouvert. Or

$$(X \coprod X') \smallsetminus p^{-1}(V) = \pi_{X \coprod X'}\big(h^{-1}(Y \smallsetminus U) \cap ((X \coprod X') \times K)\big)$$

est fermé par le résultat suivant, ce qui termine la preuve.
Soit Y un espace topologique compact. Alors la projection $\pi_X : X \times Y \to X$ est fermée.
Prouvons cela. Soit $C \subseteq X \times Y$ un fermé et voyons que $X \smallsetminus \pi_X(C)$ est ouvert. Soit $x \in X \smallsetminus \pi_X(C)$. Pour tout $y \in Y$, il existe des voisinages ouverts $U_y \ni x$ et $V_y \ni y$ vérifiant $U_y \times V_y \cap C = \varnothing$. Comme Y est compact, il est recouvert par une collection finie d'ouverts $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$. En notant $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n} \ni x$, on a encore $(U \times Y) \cap C = \varnothing$ comme voulu.

Exercice 7 (Séparation des quotients)

1. Montrons d'abord que pour chaque point $x \notin A$, on peut construire un voisinage V de A et un voisinage U de x tels que l'intersection $U \cap V$ est vide. Pour chaque point $a \in A$, on prend V_a voisinage de a et U_a voisinage de x tels que $V_a \cap U_a = \varnothing$. Par la compacité de A, on peut choisir un sous-recouvrement fini de $\{V_a \mid a \in A\}$, noté $\{V_i \mid i = 1 \dots n\}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ et $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ conviennent.

On note x_0 le point dans X/A qui correspond A. Alors le paragraphe précédent traite le cas où l'un des deux points à considérer est x_0. Dans le cas où on a deux points $x_1 \neq x_2$ dans $X \smallsetminus A = (X/A) \smallsetminus \{x_0\}$: on commence par prendre dans X, par l'argument précédent, des voisinages V_1, V_2 de A et des voisinages U_1 de x_1, U_2 de x_2 vérifiant

$$V_1 \cap U_1 = \varnothing, \quad V_2 \cap U_2 = \varnothing.$$

On prend aussi, dans X, un voisinage U_1' de x_1 et un voisinage U_2' de x_2 tels que $U_1' \cap U_2' = \varnothing$. Alors $U_1' \cap U_1$ et $U_2' \cap U_2$ descendent en deux ouverts disjoints de X/A qui contiennent x_1 ou x_2 respectivement.

2. On peut prendre $X = \mathbb{R}$ et $A = \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ par exemple.
3. L'espace des orbites est l'ensemble des formes de Jordan des matrices de taille $n \times n$. Le problème de non séparabilité se produit dans le cas de matrices qui ont les mêmes valeurs propres (avec multiplicités), mais dont les formes de Jordan sont différentes. Par exemple, on ne peut pas séparer l'orbite de la matrice nulle (un singleton) et celle de la matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En effet, toute matrice $N_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ est dans la même orbite, et 0 est contenue dans l'adhérence de $\{N_a \mid a \neq 0\}$.

Exercice 8 (Sphères et groupes orthogonaux)

On considère l'action à droite de $O_n(\mathbb{R})$ sur la sphère S^{n-1}. Elle est transitive et le stabilisateur du point $(1, 0, \cdots, 0)$ est $O_{n-1}(\mathbb{R})$. D'où l'homéomorphisme $O_{n-1}(\mathbb{R}) \backslash O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$.

Exercice 9 (La droite à deux origines)

Chaque point de X admet un voisinage ouvert homéomorphe à un disque D^1. Mais les deux origines ne sont pas séparées.

Exercice 10 (Quelques propriétés des variétés topologiques)

1. Comme X est une variété, elle est localement connexe par arcs : sa connexité est alors équivalente à sa connexité par arcs.
2. Dans le cas où X est un disque ouvert de $\mathbb{R}^n$, la construction est facile et intuitive mais la formule explicite peut être compliquée. Pour donner une formule explicite, on peut faire d'abord le cas d'un carré au lieu d'un disque, puis composer les homéomorphismes. Admettons le cas d'un disque, on définit d'abord une relation d'équivalence entre les points de X : on dit $x \sim y$ si la propriété dans l'énoncé est satisfaite. Alors le cas du disque implique que les points dans chaque classe d'équivalence forment une partie ouverte de X, donc aussi fermée (comme le complémentaire des autres classes d'équivalence est ouvert). Par connexité de X, on sait qu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.
3. Par l'Exercice 1, il suffit de démontrer le cas où $X = \mathbb{R}^n$ et $A = D^n$. Un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n/D^n$ et $\mathbb{R}^n$ est facile à construire.