

TD : feuille n°1 Notions de base.

Les exercices marqués du symbole ☛ sont des exercices à faire en priorité. Ce sont des exercices classiques, et les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

1 Espaces topologiques, homéomorphismes et quotients

☛ Exercice 1. Corps convexes.

1. Un *corps convexe* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble K compact, convexe, d'intérieur non vide, et contenant 0 dans son intérieur.

(a) Montrez que la formule suivante définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$:

$$N(x) = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \in]0; +\infty[\mid \lambda x \in K \right\}.$$

Remarque : si le convexe est symétrique ($x \in K \Leftrightarrow -x \in K$), on peut montrer que $N(x)$ est une norme.

- (b) Montrez qu'il existe un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui envoie K homéomorphiquement sur D^n et la frontière de K homéomorphiquement sur S^{n-1} .
2. Soit L un ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui envoie L homéomorphiquement sur $D^m \times \{(0, \dots, 0)\}$ et la frontière de L homéomorphiquement sur $S^{m-1} \times \{(0, \dots, 0)\}$ pour un certain $m \leq n$.

Exercice 2. Compactification d'Alexandroff.

Soit X un espace topologique séparé et localement compact. On munit $X^+ = X \cup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X , et les complémentaires dans X^+ des compacts de X .

1. Vérifiez que X^+ est bien un espace topologique.
2. Montrez que X^+ est un espace compact. Montrez que le sous-ensemble $X^+ \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrez que la topologie définie sur X^+ est l'unique topologie telle que :
 - (a) X^+ est compact et séparé,
 - (b) l'application identité $X \rightarrow X^+ \setminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme.
4. Montrez que $(\mathbb{R}^n)^+$ est homéomorphe à S^n .

Exercice 3. Bouquet d'espaces.

1. Soit X, X' des espaces topologiques et $x \in X$ et $x' \in X'$. Montrez que le bouquet $X \vee X'$ est homéomorphe au sous-espace $X \times \{x'\} \cup \{x\} \times X'$ de $X \times X'$.
2. Soit $(S_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de S^1 (avec un point distingué x). On note $B := \bigvee_{i \in \mathbb{N}} S_i^1$.
 - (a) Soit $P = \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i^1$ le produit des S^1 , muni de la topologie de Tychonoff¹. Montrez que B n'est pas homéomorphe au sous-espace $Y \subset P$ défini par :

$$Y := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\{x\} \times \dots \times \{x\} \times S_i^1 \times \{x\} \times \dots) \quad .$$

- (b) La *boucle d'oreille hawaïenne* est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour $n \geq 1$ (faites un dessin). Montrez que B n'est pas homéomorphe à H .

1. Rappel : si (X_α) est une famille d'espaces topologiques, la topologie de Tychonoff sur $\prod X_\alpha$ est la topologie dont les ouverts sont réunion d'ensembles du type $\prod U_\alpha$ où les U_α sont tous égaux à X_α , sauf un nombre fini qui sont des ouverts de X_α . Une application $f : X \rightarrow \prod X_\alpha$ est continue si et seulement si ses coordonnées le sont. Le *théorème de Tychonoff* affirme qu'un produit d'espaces compacts, muni de la topologie de Tychonoff, est compact.

☛ Exercice 4. Espaces projectifs.

On rappelle que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace $\mathbb{K}P^n$ est le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ agissant par homothéties.

1. Montrez que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à S^1 et que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2 .
2. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur S^n par multiplication. Montrez que le quotient $S^n/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^n$.
(b) Le sous-groupe S^1 de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrez que le quotient S^{2n+1}/S^1 est homéomorphe à $\mathbb{C}P^n$.
3. Montrez que $\mathbb{R}P^{n+1}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^n \cup_p D^{n+1}$, où $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ est la projection quotient obtenue à la question précédente. Montrez de même que $\mathbb{C}P^{n+1} = \mathbb{C}P^n \cup_p D^{2n+2}$.
4. Montrez que $\mathbb{R}P^n$, resp. $\mathbb{C}P^n$ est une variété topologique compacte de dimension n , resp. $2n$.

☛ Exercice 5. Tore.

Le tore est l'espace topologique T , quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) = (x, 1)$ et $(0, y) = (1, y)$. Montrez que T est homéomorphe aux espaces suivants :

- (a) le produit $S^1 \times S^1$,
- (b) le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations,
- (c) le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$, qu'on peut obtenir comme image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1, par une rotation d'axe (Oz)).

☛ Exercice 6. Produit et recollement

Soient $f : A \rightarrow X$ et $f' : A \rightarrow X'$ deux applications continues et Z un espace topologique séparé et localement compact. Montrez l'homéomorphisme :

$$(X \cup_{f, f'} X') \times Z \simeq (X \times Z) \cup_{f \times \text{Id}_Z, f' \times \text{Id}_Z} (X' \times Z).$$

Exercice 7. Séparation des quotients.

1. Soit A un sous-espace compact d'un espace topologique séparé X . Montrez que X/A est séparé.
2. Trouvez un espace topologique séparé X et un sous espace A de X tel que X/A est non séparé.
3. Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur $M_n(\mathbb{C})$ par conjugaison. Montrez que l'espace des orbites $M_n(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C})$ est non séparé.

Exercice 8. Sphères et groupes orthogonaux.

On considère le groupe orthogonal $O_{n-1}(\mathbb{R})$ comme le sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$. Le groupe $O_{n-1}(\mathbb{R})$ agit sur $O_n(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche. Montrez que l'espace des orbites $O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^{n-1} .

Exercice 9. La droite à deux origines.

La droite à deux origines est l'espace topologique X obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{R}$ le long du sous-espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrez que X est non séparée, mais que tout point de X admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Quelques propriétés des variétés topologiques.

Soit X une variété topologique de dimension n .

1. Montrez que X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs.
2. Montrez que si X est connexe, alors pour tous points x et y de X , il existe un homéomorphisme de X envoyant x sur y . (On pourra commencer par traiter le cas d'un disque ouvert de $\mathbb{R}^n$)
3. Soit $A \subset X$ une partie de X satisfaisant la propriété suivante. Il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de X contenant A et un homéomorphisme $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui envoie A homéomorphiquement sur un ensemble compact convexe. Montrez que X/A est homéomorphe à X .

2 Rudiments de la théorie de l'homotopie

☛ Exercice 11. Quelques exemples simples d'équivalences d'homotopie

1. Regroupez les lettres capitales de l'alphabet latin par type d'homotopie. (On admettra - ce qu'on démontrera dans le chapitre 1 du cours - que les lettres A, B et C ne sont pas homotopiquement équivalentes.)
2. Le *ruban de Moebius* est l'espace topologique M , quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) = (1-x, 1)$. Dessinez M . Montrez que M a le même type d'homotopie que S^1 .
3. Montrez que $O_n(\mathbb{R})$ est un rétracte par déformation de $GL_n(\mathbb{R})$ (indication : utilisez Gram-Schmidt).
4. Si X et X' , resp. Y et Y' , sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrez que les produits $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type d'homotopie.

Exercice 12. Type d'homotopie d'un complémentaire

1. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$, avec $k < n$. Montrez que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que S^{n-k-1} .
2. Soit C un sous ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Montrez que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que S^{n-1} . (indication : commencer par se ramener au cas où C est un convexe contenant 0 et contenu dans une boule de centre 0 et de rayon $1/2$).
3. Soit X un espace topologique, et A et B deux sous-espaces de X . Montrez que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.

☛ Exercice 13. Décomposition de S^n en anses

1. Soit $n \geq 2$. Montrez que pour tout entier k avec $1 \leq k \leq n$, il existe un homéomorphisme :

$$\phi_{n,k} : S^n \simeq S^{n-k} \times D^k \bigcup_{S^{n-k} \times S^{k-1}} D^{n-k+1} \times S^{k-1}.$$

2. On note A_k et B_k les sous-parties de S^n définies par :

$$A_k = \phi_{n,k}^{-1}(S^{n-k} \times \{0\}), \quad \text{et} \quad B_k = \phi_{n,k}^{-1}(\{0\} \times S^{k-1}).$$

Montrez que $S^n \setminus (A_k \cup B_k)$ a le type d'homotopie de $S^{n-k} \times S^{k-1}$. (Indication : on démontrera que $S^n \setminus (A_k \cup B_k)$ se rétracte par déformation sur $\phi_{n,k}^{-1}(S^{n-k} \times S^{k-1})$).

Exercice 14. Homotopies et Cônes.

Le cône CX d'un espace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous espace $X \times \{0\}$ de $X \times [0, 1]$. Soit $q : X \times [0, 1] \rightarrow CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\begin{aligned} \iota_X : X &\rightarrow CX \\ x &\mapsto q(x, 1) \end{aligned}.$$

1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Montrez que f est homotope à une application constante si et seulement si il existe une application $F : CX \rightarrow Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$.
2. Montrez que CS^n est homéomorphe à D^{n+1} .
3. Montrez que pour tout espace X , le cône CX est contractile.

☛ Exercice 15. Cofibrations et prolongement des applications

1. Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration, et $f, g : A \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Montrez que f admet un prolongement par continuité à X tout entier si et seulement si g admet un prolongement par continuité à X tout entier.
2. Soit $X = [0, 1]$ et $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \subset X$. A l'aide de la question précédente, montrez que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ n'est pas une cofibration.

Exercice 16. Cofibration et recollement d'espaces

Soit Y un espace topologique, S un sous-espace fermé de Y , et $\iota : S \hookrightarrow Y$ l'inclusion. Soit $f : S \rightarrow X$ une application continue.

1. On note $j : X \rightarrow X \cup_{f,\iota} Y$ l'application qui envoie $x \in X$ sur sa classe dans le quotient $X \cup_{f,\iota} Y$. Montrez que j est un plongement topologique (c'est à dire une application continue injective qui induit un homéomorphisme sur son image).
2. On suppose que l'inclusion $S \times I \hookrightarrow Y \times I$ est une cofibration. Montrez que l'inclusion $j : X \hookrightarrow X \cup_{f,\iota} Y$ est une cofibration.

Exercice 17. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels.

Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique. On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y , muni de la topologie de la convergence uniforme. Montrez que deux fonctions f, g sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathcal{C}(X, Y)$ si et seulement si elles sont homotopes.

☞ Exercice 18. Groupes de matrices

Pour les groupes de matrices suivants, déterminez s'ils sont compacts ou non, et déterminez leur π_0 :

$$GL_n(\mathbb{C}) , GL_n(\mathbb{R}) , O_n(\mathbb{R}) , SO_n(\mathbb{R}) , U_n(\mathbb{C}) , SU_n(\mathbb{C}) .$$

Exercice 19. Un groupe topologique homotopiquement commutatif

On note $GL_\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices infinies de la forme $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \text{Id}_\infty \end{bmatrix}$.

On note $i_n : GL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_\infty(\mathbb{R})$ l'inclusion donnée par $A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \text{Id}_\infty \end{bmatrix}$. On munit $GL_\infty(\mathbb{R})$ de la topologie où un sous-ensemble U est ouvert si et seulement si pour tout n , $i_n^{-1}(U)$ est ouvert.

1. Montrez que le produit de matrices et la fonction inverse d'une matrice de $GL_\infty(\mathbb{R})$ sont continues (c'est à dire, $GL_\infty(\mathbb{R})$ est un *groupe topologique*).
2. Calculez $\pi_0(GL_\infty(\mathbb{R}))$.
3. Montrez que les applications suivantes sont homotopes :

$$\begin{array}{ccc} f : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ A, B & \mapsto & \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} g : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ A, B & \mapsto & \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \end{array} .$$

4. Montrez que $GL_\infty(\mathbb{R})$ est homotopiquement commutatif, c'est à dire que les applications $(A, B) \mapsto AB$ et $(A, B) \mapsto BA$ sont homotopes.