Formes quadratiques, orthogonalité (TD6)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et P un espace vectoriel sur k de dimension 2 muni d'une forme quadratique. Supposons que P possède trois droites isotropes. Montrer que P est totalement isotrope.

Exercice 2

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soient q et q' deux formes quadratiques sur E vérifiant $q^{-1}(\{0\}) = (q')^{-1}(\{0\})$.

a) Supposons k algébriquement clos. Montrer qu'il existe $a \in k^\times$ tel que l'on ait $q' = aq$.

b) Donner un contre-exemple pour $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Considérons le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $E = \mathbb{F}_2^3$ muni de la forme bilinéaire b de matrice I_3 dans la base canonique.

a) Montrer que $\mathrm{O}(b)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Soit U l'ensemble $\{v \in E \mid b(v,v) = 1\}$.

b) En étudiant l'action de $\mathrm{O}(b)$ sur U, vérifier que le théorème de Witt tombe ici en défaut.

Exercice 4

Soient k un corps de caractéristique différente de 2, E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à 0 et H un hyperplan de E. Soient q une forme quadratique non dégénérée sur E de et u un élément de $O(q)$ vérifiant $u|_H = \mathrm{id}_H$.

a) Si $q|_H$ est non dégénérée, montrer que u est soit l'identité, soit la réflexion orthogonale d'hyperplan H.

b) Si $q|_H$ est dégénérée, montrer que u est l'identité.

Exercice 5

Soient $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique

$$q(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

de forme bilinéaire b.

Un sous-espace F de E est dit *elliptique* si $q|_F$ est définie négative, *hyperbolique* si $q|_F$ est de signature $(1, m)$ avec $m \geq 1$ et *parabolique* si F est isotrope.

a) Soit F un sous-espace de dimension ≥ 2 tel qu'il existe $x \in F$ avec $q(x) > 0$. Montrer que F est hyperbolique.

b) Soit F un sous-espace elliptique de dimension $\leq n-1$. Montrer que $F^\perp$ est hyperbolique.

c) Soit F un espace parabolique. Montrer que $q|_F$ est de rang $\dim F - 1$.

d) Soient x et y deux éléments linéairement indépendants de E. Montrer que l'on a

$$\begin{array}{ll} b(x,y)^2 \leq q(x)q(y) & \text{si } \mathrm{Vect}(x,y) \text{ parabolique ou elliptique}\,; \\ b(x,y)^2 > q(x)q(y) & \text{si } \exists x_0 \in \mathrm{Vect}(x,y),\ q(x_0) > 0. \end{array}$$

e) Montrer que le cône

$$C = \{x \in E \mid q(x) \geq 0,\ x_0 \geq 0\}$$

est *autodual*, *i.e.* vérifie pour tout $x \in E$:

$$x \in C \Leftrightarrow \forall y \in C,\ b(x, y) \geq 0.$$

Exercice 6

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 distinct de $\mathbb{F}_3$ et E un espace vectoriel sur k. Soient q une forme quadratique non triviale sur E et $s \in k^\times$ tel que l'ensemble $q^{-1}(\{s\})$ est non vide.

Supposons que $q^{-1}(\{s\})$ n'engendre pas E en tant qu'espace vectoriel. Soit g une forme linéaire vérifiant $q^{-1}(\{s\}) \subseteq \ker g$. Soit $a \in q^{-1}(\{s\})$; on considère la forme linéaire $f : x \mapsto q(x+a) - q(a) - q(x)$.

a) Montrer que l'on a $f(x)g(x)q(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

b) Conclure que $q^{-1}(\{s\})$ engendre E.

Exercice 7

Soient $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique différente de 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ de dimension finie $n \geq 1$.

Si q et q' deux formes quadratiques sur E de matrice respective Q et Q' dans une base fixée, on dit que q et q' sont *équivalentes* si il existe une matrice P inversible vérifiant ${}^tPQP = Q'$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{F}^\times \smallsetminus \mathbb{F}^{\times 2}$. Si $n = 1$, montrer que toute forme quadratique non dégénérée sur E est équivalente à x^2 ou αx^2.

b) Soient $a, b \in \mathbb{F}^\times$. Montrer que l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ possède une solution dans $\mathbb{F}^2$.

c) Montrer que toute forme quadratique non dégénérée sur E est équivalente à

$$q_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{ou} \quad q_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2.$$

Exercice 8

Soit k un corps. On définit son *niveau* $s(k) \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ par

$$s(k) = \inf\{n \geq 1 \mid \exists (x_1, \ldots, x_n) \in k^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\},$$

avec la convention que l'infimum de l'ensemble vide est ∞.

a) Montrer que deux corps isomorphes ont même niveau. La réciproque est-elle vraie ?

b) Montrer que le niveau d'un corps fini est égal à 1 ou 2.

c) Montrer l'égalité $s(k) = s(k(X))$.

Supposons k de caractéristique différente de 2. Pour $n \geq 1$, on considère la forme quadratique $q_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

d) Montrer que q_n admet un vecteur isotrope si et seulement si on a $s(k) \leq n - 1$.

e) Supposons $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout vecteur non nul $x = (x_1, \ldots, x_n)$, il existe une matrice T_x de première ligne $(x_1, \ldots, x_n)$ et vérifiant

$${}^tT_x T_x = T_x {}^tT_x = q_n(x_1, \ldots, x_n) I_n.$$

f) En déduire que l'ensemble des sommes non nulles de 2^k carrés d'éléments de k est un groupe multiplicatif.

g) Montrer que le niveau d'un corps est soit infini, soit une puissance de 2.