Divers exercices des examens du passé (TD12)

FIMFA Algèbre 2, Mai 2014

Exercice 1 (Partiel 2013)

a) Quel est le groupe de Galois du polynôme $X^3 - 10$ sur $\mathbb{Q}$? Sur $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$?

b) Trouver un polynôme de groupe de Galois $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}$. Même question avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (Examen 2011)

Soit $K \subseteq L$ une extension de corps, galoisienne finie de groupe de Galois $\mathfrak{S}_n$ pour un entier $n \geq 5$. Montrer que le degré sur K d'un élément de L est soit 1, soit 2, soit supérieur ou égal à n. On utilisera sans démonstration que le seul sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 3 (Partiel 2012)

On rappelle que si M est une matrice carrée à coefficients dans un corps algébriquement clos $\overline{K}$, il existe un unique couple (D_M, N_M) de matrices carrées à coefficients dans $\overline{K}$ telles que $M = D_M + N_M$, $D_M N_M = N_M D_M$, D_M est diagonalisable et N_M est nilpotente.

a) Si M est à coefficients réels, montrer qu'il en est de même pour D_M et N_M.

b) Si M est à coefficients rationnels, montrer qu'il en est de même pour D_M et N_M.

Exercice 4 (Partiel 2013)

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{Q}} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

a) Montrer qu'il existe un sous-corps $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $a \notin K$ et que tout sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ contenant strictement K contient a.

On dit que K est un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ maximal sans a.

On choisit un nombre premier p divisant $[K(a) : K]$. Soit $K \subseteq L \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ une extension finie non triviale de K. On note M la clôture normale de L dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et $G = \mathrm{Gal}(M/K)$.

b) Montrer que p divise $[L : K]$.

c) Montrer que $[L : K]$ est une puissance de p.

d) Montrer que le degré de $K(a)$ sur K est égal à p, et que $K(a)$ est la seule sous-extension de $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ de degré p sur K.

e) Montrer que G est cyclique, puis que toute extension finie de K est galoisienne cyclique.

f) Montrer qu'il existe $b \in K(a)$ vérifiant $b^p \in K$ et $K(b) = K(a)$.

Exercice 5 (Examen 2011)

Soit K un corps et soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On a défini en cours la matrice compagnon $C(P) \in M_n(K)$. Soit $Q \in K[X]$ un polynôme unitaire. Calculer les invariants de similtude de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} C(P) & 0 \\ 0 & C(Q) \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Examen 2012)

Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout morphisme surjectif d'anneaux $u : A \to A$ est bijectif.

Exercice 7 (Examen 2012)

Soit A un anneau qui est une extension de type fini de $\mathbb{Z}$. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A.

a) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{M})$ est soit $\mathbb{Z}$, soit un corps fini.

b) En utilisant le Nullstellensatz faible, montrer que le corps $A/\mathfrak{M}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions de $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{M})$.

c) Si $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{M} = 0$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que le corps $A/\mathfrak{M}$ est fini.

Soit $f \in A$ un élément non nilpotent, et soit $\mathfrak{N}$ un idéal maximal de l'anneau des fractions (non nul) A_f.

d) Montrer que le corps $A_f/\mathfrak{N}$ est fini.

e) En déduire que $A/(A \cap \mathfrak{N})$ est un corps fini.

f) Montrer que l'intersection de tous les idéaux maximaux de A est $\sqrt{(0)}$.

g) En déduire que les points fermés sont denses dans toute partie fermée de Spec A.