

Dimension, localisation (TD11)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Mai 2014

Exercice 1

Soient X un espace topologique et Y un sous-ensemble de X .

- Montrer l'inégalité $\dim Y \leq \dim X$.
- Supposons que X admet un recouvrement par des ouverts U_i , $i \in I$. Montrer que l'on a $\dim X = \sup_{i \in I} \dim U_i$.
- Donner l'exemple d'un espace X et d'un ouvert dense U de X avec $\dim U < \dim X$.
- Supposons Y fermé et X irréductible de dimension finie, égale à $\dim Y$. Montrer que l'on a $X = Y$.

Exercice 2

Soient A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative de A .

- Si A est noethérien, montrer que le localisé A_S est noethérien.
- Si A est principal et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé A_S est principal.
- Si A est factoriel et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé A_S est factoriel.

Exercice 3

Soient A un anneau commutatif unitaire et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A .

- Montrer que $A_{\mathfrak{P}}$ est local, d'idéal maximal $\mathfrak{P}A_{\mathfrak{P}}$.

Notons $k(\mathfrak{P})$ le *corps résiduel* $A_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}A_{\mathfrak{P}}$.

- Montrer que $A \rightarrow k(\mathfrak{P})$ induit une injection $\varphi_{\mathfrak{P}} : A/\mathfrak{P} \hookrightarrow k(\mathfrak{P})$ qui fait de $k(\mathfrak{P})$ le corps des fractions de $A/\mathfrak{P}$.
- Montrer que $\varphi_{\mathfrak{P}}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathfrak{P}$ est un idéal maximal de A .
- Soit $f \in A \setminus \mathfrak{P}$. Montrer que $k(\mathfrak{P})$ et $k(\mathfrak{P}A[f^{-1}])$ sont canoniquement isomorphes.

Exercice 4 (Un exemple de Nagata)

Soient k un corps et $A = k[X_1, \dots, X_n, \dots]$ l'anneau de polynômes en une infinité de variables. Soit (u_n) une suite croissante de $\mathbb{N}$ tendant vers l'infini, avec $u_1 = 0$. On note $\mathfrak{P}_n$ l'idéal premier $(X_{u_n+1}, \dots, X_{u_{n+1}})$. Soient S le complémentaire de la réunion des $\mathfrak{P}_n$ et A_S le localisé de A en S .

- Déterminer les idéaux maximaux de A_S .
- Exhiber une condition suffisante sur (u_n) pour que la dimension de Krull de A_S soit infinie.

On suppose désormais que (u_n) vérifie la condition exhibée à la question (b).

Soit R un anneau dont les localisés en tout idéal maximal sont noethériens et tel que tout élément $x \in R \setminus \{0\}$ soit contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux.

- Montrer que R est noethérien.
- En déduire que A_S est noethérien.

Exercice 5 (Un autre exemple de Nagata)

Soient k un corps et $k[[x]]$ son anneau des séries formelles. Soit $z = \sum_{i \geq 0} a_i x^i \in k[[x]]$ un élément transcendant sur $k(x)$. On note alors, pour $j \geq 1$, $z_j = x^{1-j}(z - \sum_{i < j} a_i x^i) \in xk[[x]]$.

Soit $R_1 = k[x, z_1, \dots, z_n, \dots]$.

- Montrer que xR_1 est un idéal maximal de R_1 .
- En déduire que les idéaux de l'anneau local $(R_1)_{xR_1}$ sont tous de la forme $x^n R_1$ pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Soient $y \in k[[x]]$ un élément transcendant sur $k(x, z)$ et $R_2 = R_1[y]$. Soit $\mathfrak{M}$ l'idéal de R_2 engendré par x et y .

c) Montrer que $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de R_2 .

d) Montrer que $(R_2)_{\mathfrak{M}}$ est un anneau local de dimension 2.

Soit $\mathfrak{N}$ l'idéal de R_2 engendré par $x - 1$, y et z .

e) Montrer que $\mathfrak{N}$ est un idéal maximal de R_2 .

f) Montrer que $(R_2)_{\mathfrak{N}}$ est un anneau local de dimension 3.

Soit R le localisé de R_2 en la partie multiplicative $R_2 \setminus (\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N})$.

g) Montrer que l'anneau R est noethérien.

Soit $A = k + \text{Rad } R$.

h) Montrer que A est un anneau local.

i) Montrer que R est une extension entière finie de A et que A est de dimension 3.

j) En utilisant le *going up*, en déduire que A est noethérien.

Soit

$$0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 = xR \cap A \subsetneq \mathfrak{P}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_m$$

une chaîne maximale d'idéaux premiers de A .

k) Montrer que l'on a $m = 2$.

l) En déduire que A est non caténaire¹.

Exercice 6

Soient A un anneau commutatif unitaire et M un A -module de type fini. Soient $X = \text{Spec } A$ et

$$\begin{array}{ccc} d : X & \rightarrow & \mathbb{N} \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \dim_{k(\mathfrak{P})} M_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{P} M_{\mathfrak{P}} \end{array} .$$

Soient $\mathfrak{P} \in X$ et $n = d(\mathfrak{P})$. Soit $\alpha : k(\mathfrak{P})^n \rightarrow M_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{P} M_{\mathfrak{P}}$ un isomorphisme de $k(\mathfrak{P})$ -espaces vectoriels.

On commence par établir l'existence du diagramme commutatif suivant (pour un certain $f \in A \setminus \mathfrak{P}$).

$$\begin{array}{ccccc} A[f^{-1}]^n & \longrightarrow & A_{\mathfrak{P}}^n & \longrightarrow & k(\mathfrak{P})^n \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ M[f^{-1}] & \longrightarrow & M_{\mathfrak{P}} & \longrightarrow & M_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{P} M_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

a) Montrer que α se relève en une surjection $\beta : A_{\mathfrak{P}}^n \rightarrow M_{\mathfrak{P}}$ de $A_{\mathfrak{P}}$ -modules.

b) Montrer qu'il existe $f \notin \mathfrak{P}$ tel que β se relève en une surjection $\gamma : A[f^{-1}]^n \rightarrow M[f^{-1}]$ de $A[f^{-1}]$ -modules.

c) En déduire que d est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que $\{\mathfrak{P} \in X \mid d(\mathfrak{P}) \geq n\}$ est fermé pour tout $n \geq 0$.

1. on rappelle qu'un anneau de dimension finie A est dit caténaire si entre deux idéaux premiers $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ de A , toutes les chaînes maximales d'idéaux premiers entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ ont même longueur