Groupe linéaire, formes sesquilinéaires (TD5)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1 (Un résultat de Jordan-Frobenius)

Soient $n \geq 1$ et $\mathbb{C}^n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni du produit scalaire hermitien usuel $(\ |\ )$. On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices hermitiennes.
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) En considérant le produit scalaire défini par $(x|y)_G = |G|^{-1} \sum_G (gx|gy)$, montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

De ce fait, on suppose à présent que G est un sous-groupe de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. Aussi, on munit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de la norme triple.
Soient u et h deux éléments de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tels que u commute avec $[u, h] := uhu^{-1}h^{-1}$ et h vérifie $||\mathrm{id} - h|| < \sqrt{2}$.

b) En considérant les espaces propres de u et de huh^{-1}, montrer que u et h commutent.

Soit $v \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. On suppose maintenant que u et v vérifient $||\mathrm{id} - u|| < 2^{-1}$ et $||\mathrm{id} - v|| < \sqrt{2}$. On définit la suite (v_k) par $v_0 := v$ et $v_{k+1} := [u, v_k]$ pour tout $k \geq 0$.

c) Montrer l'inégalité suivante, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$||\mathrm{id} - v_k|| \leq 2^k ||\mathrm{id} - u||^k ||\mathrm{id} - v||.$$

d) En déduire que u et v commutent si et seulement si la suite (v_k) est stationnaire à partir d'un certain rang.

Soient $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ un réel fixé et H_δ le sous-groupe de G engendré par $\Delta := \{g \in G \mid ||\mathrm{id} - g|| \leq \delta\}$.

e) Vérifier que H_δ est un sous-groupe normal et abélien de G.

On identifie $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ à un sous-ensemble du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ muni de la norme induite par la norme hermitienne de $M_n(\mathbb{C})$. On note respectivement $\overline{B}(x, r)$ et $B(x, r)$ les boules fermée et ouverte de $\mathbb{R}^{2n^2}$ centrées en x et de rayon $r \geq 0$.
Soit T un ensemble de représentants de G/H_δ.

f) Etablir l'inclusion

$$\bigcup_{t \in T} \overline{B}\Big(t, \frac{\delta}{2}\Big) \subseteq \overline{B}\Big(0, 1 + \frac{\delta}{2}\Big) \setminus B\Big(0, 1 - \frac{\delta}{2}\Big).$$

g) Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe normal et abélien, d'indice borné par une constante ne dépendant que de n.

Exercice 2

Montrer que le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité. En particulier, toute forme sesquilinéaire réelle est bilinéaire.

Exercice 3

a) Déterminer le rang et la signature de la forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ donnée par $A \mapsto \mathrm{tr}\, A^2$.

b) Mêmes questions pour $A \mapsto \mathrm{tr}\, A^t A$ et pour $A \mapsto (\mathrm{tr}\, A)^2$.

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit β la forme quadratique définie par $B \mapsto \det B$ sur $M_2(k)$.

c) Donner une base hyperbolique de $M_2(k)$ pour β.

d) Exhiber un élément de $\mathrm{O}(\beta)$ non diagonalisable.

Exercice 4

Soient k un corps et E un espace vectoriel sur k possédant une base dénombrable $(e_n)_{n\geq 1}$. On définit une forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ en posant $\phi(e_i, e_j) = \delta_{i,j+1}$ pour tous $i, j \geq 1$. Montrer que l'application linéaire $d_\phi : y \mapsto \phi(., y)$ est injective, mais que $s_\phi : x \mapsto \phi(x, .)$ ne l'est pas.

Exercice 5

Soient k un corps, E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur k. Soit ϕ une forme sesquilinéaire à droite sur $E \times F$ telle que $\begin{array}{cccc} s_\phi : & E & \to & F^* \\ & x & \mapsto & \phi(x, .) \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} d_\phi : & F & \to & E^* \\ & y & \mapsto & \phi(., y) \end{array}$ soient des applications semi-linéaires bijectives. Par transport de structure, on définit une forme sesquilinéaire à gauche $\widehat{\phi}$ sur $F^* \times E^*$ appelée *forme inverse* de ϕ.

a) Montrer que l'on a $\widehat{\phi}(y', x') = \langle s_\phi^{-1}(y'), x' \rangle = \langle d_\phi^{-1}(x'), y' \rangle$ pour tous $x' \in E^*$ et $y' \in F^*$.

b) Montrer que ϕ est la forme inverse de $\widehat{\phi}$.

Exercice 6

Soient k un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $k' = k(i)$. On munit k' de l'involution induite par la conjugaison complexe. Soient E' un k'-espace vectoriel et E le k-espace vectoriel sous-jacent. Une forme k-bilinéaire f sur $E \times E$ est dite *invariante par* i si l'on a $f(ix, iy) = f(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

a) Montrer que l'application $\phi \mapsto \big((x, y) \mapsto \phi(x, y) + i\phi(x, iy)\big)$ est un isomorphisme de l'espace des formes bilinéaires invariantes par i sur $E \times E$ sur celui des formes sesquilinéaires sur $E' \times E'$.

b) Montrer qu'elle induit un isomorphisme de l'espace des formes symétriques invariantes par i sur $E \times E$ sur l'espace des formes hermitiennes sur $E' \times E'$.

c) Dans ce cas-là, montrer que $(x, y) \mapsto \phi(x, iy)$ est antisymétrique.

Exercice 7

Soient k un corps, E un espace vectoriel sur k, ϕ une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ et u un endomorphisme de E.

Si $v : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, on définit sa *transposée* comme étant l'application $\begin{array}{cccc} {}^t v : & F^* & \to & E^* \\ & f & \mapsto & f \circ v \end{array}$.

a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant $\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y))$ pour tous $x, y \in E$;

(ii) l'application d_ϕ est injective et on a l'inclusion ${}^t u(d_\phi(E)) \subseteq d_\phi(E)$.

b) Donner un exemple où E est de dimension infinie, d_ϕ est injective, mais où ${}^t u(d_\phi(E))$ n'est pas contenu dans $d_\phi(E)$.

Exercice 8

Soient k un corps, E_0 et E_1 deux espaces vectoriels sur k et ϕ_0, ϕ_1 des formes sesquilinéaires respectivement sur $E_0 \times E_0$ et $E_1 \times E_1$. On suppose que ϕ_1 est non dégénérée et qu'il existe un élément $\alpha \in k$ et une bijection ensembliste $v : E_0 \to E_1$ tels que l'on ait $\phi_1(v(x), v(y)) = \phi_0(x, y)\alpha$ pour tous $x, y \in E_0$.

a) Montrer que ϕ_0 est non dégénérée et que v est linéaire.

Soient E_2 un espace vectoriel sur k et ϕ_2 une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $E_2 \times E_2$. On suppose l'existence d'une application linéaire surjective $u : E_1 \to E_2$ qui vérifie

$$\phi_2(u(x), u(y)) = 0 \Rightarrow \phi_1(x, y) = 0 \quad \text{pour tous } x, y \in E_1.$$

b) Montrer que u est un isomorphisme de E_1 sur E_2.

c) Montrer que pour tout $y \in E_1$, il existe un élément $m(y) \in k$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)m(y)$ pour tout $x \in E_1$.

d) En déduire qu'il existe $\beta \in k^\times$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)\beta$ pour tous $x, y \in E_1$.