Topologie de Zariski, lemme de Nakayama (TD10)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Mai 2014

Exercice 1

a) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'image inverse par f induit une application continue $f^\sharp : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$.

b) Soit I un idéal de l'anneau A et soit $p : A \to A/I$ la projection canonique. Montrer que $p^\sharp : \mathrm{Spec}\, A/I \to \mathrm{Spec}\, A$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Spec}\, A/I$ sur le fermé $V(I)$ de $\mathrm{Spec}\, A$.

c) Montrer que $\mathrm{Spec}\, A^{\mathrm{red}}$ est canoniquement homéomorphe à $\mathrm{Spec}\, A$.

Exercice 2

Soit X un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $C(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que les ensembles $U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ pour $f \in C(X, \mathbb{R})$ forment une base de la topologie de X.

On note $\mathrm{SpecMax}\, C(X, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Spec}\, C(X, \mathbb{R})$ constitué des points fermés. On rappelle que $x \mapsto \mathfrak{M}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$ induit une bijection ensembliste

$$\varphi : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{SpecMax}\, C(X, \mathbb{R}).$$

b) Munir $\mathrm{SpecMax}\, C(X, \mathbb{R})$ d'une topologie faisant de φ un homéomorphisme.

c) La comparer avec la topologie de Zariski.

Exercice 3

Soient k un corps et $n \geq 1$ un entier. La topologie de Zariski sur k^n est la topologie induite par la topologie de Zariski de $\mathrm{Spec}\,(k[x_1, \ldots, x_n])$ via l'inclusion canonique $k^n \subseteq \mathrm{Spec}\,(k[x_1, \ldots, x_n])$. Supposons k infini. Montrer que la topologie de Zariski sur k^2 n'est pas la topologie produit sur $k \times k$ où k est muni de la topologie de Zariski.

Exercice 4

Soit $\Gamma = \{(n, 2^n, 3^n) \mid n \geq 1\}$, que l'on verra, selon les cas, comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^3$ ou de $\mathbb{F}_p^3$ pour p premier.

a) Montrer que Γ est Zariski dense dans $\mathbb{C}^3$.

Soient p un nombre premier et $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

b) Montrer que Γ est fermé pour la topologie de Zariski dans $\overline{\mathbb{F}}_p^3$.

c) Déterminer explicitement Γ dans $\overline{\mathbb{F}}_2^3$ et $\overline{\mathbb{F}}_3^3$.

Exercice 5

a) Montrer que tout sous-espace de $\mathbb{C}^n$ connexe pour la topologie standard est aussi connexe pour la topologie de Zariski.

b) Exhiber un contre-exemple à la réciproque.

c) Exhiber l'exemple d'un espace Zariski connexe mais non irréductible.

Exercice 6

Parmi les sous-variétés suivantes de $\mathbb{C}^2$, déterminer lesquelles sont irréductibles, et préciser leurs composantes irréductibles :

$$V(Y^2 - X), \quad V(XY), \quad V(X^2 + Y^2), \quad V(Y^2 - X^3 - X).$$

Exercice 7 (Lemme de Nakayama)

Soient A un anneau commutatif unitaire. Soient I un idéal de A contenu dans le radical de Jacobson de A, et M un A-module de type fini.

a) Montrer que si on a $IM = M$, alors M est le module nul.

Le cas le plus courant d'utilisation est le cas local. Supposons donc de plus A local d'idéal maximal $\mathfrak{M}$. Soit N un sous-A-module de M.

b) Montrer que si on a $M = N + \mathfrak{M}M$, alors N est égal à M.

Exercice 8

Soient A un anneau commutatif local et M un A-module de type fini.

a) En utilisant le lemme de Nakayama, montrer que les familles génératrices minimales de M ont même cardinal.

b) Rappeler un contre-exemple d'une telle affirmation pour un $\mathbb{Z}$-module.

Exercice 9

Soient k un corps et A l'anneau local $k[x, x^{1/2}, x^{1/3}, \ldots]/(x)$, d'idéal maximal $\mathfrak{M}$.

a) Montrer que l'idéal $\mathfrak{M}$ et le A-module $\mathfrak{M}$ fournissent un contre-exemple à l'énoncé du lemme de Nakayama dans lequel on enlèverait l'hypothèse de finitude.

On va maintenant donner deux cas pour lesquels on a un lemme de Nakayama sans hypothèse de finitude.

Soient R un anneau commutatif unitaire, I un idéal et M un R-module vérifiant $IM = M$.

b) Supposons I nilpotent, c'est-à-dire $I^n = 0$ pour un certain $n \geq 1$. Montrer que M est nul.

Supposons R gradué, c'est-à-dire $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ avec $R_a R_b \subseteq R_{a+b}$ pour tous $a, b \geq 0$, et $I \subseteq R_m$ pour un certain $m > 0$. On suppose aussi que M est gradué, c'est-à-dire $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ avec $R_a M_b \subseteq M_{a+b}$ pour tous $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$.

c) Supposons $M_n = 0$ dès que $n \leq n_0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{Z}$. Montrer que M est nul.