Finitude en algèbre commutative (TD9)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Mai 2014

Exercice 1

Soient K et L deux extensions galoisiennes finies de $\mathbb{Q}$. On suppose[1] $K \cap L = \mathbb{Q}$.

a) Montrer que l'extension composée KL de $\mathbb{Q}$ est galoisienne finie.

b) Montrer que la restriction induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{Gal}(KL/L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

c) Montrer que l'application canonique $\mathrm{Gal}(KL/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est un isomorphisme de groupes.

On suppose que les discriminants $D_{K/\mathbb{Q}}$ et $D_{L/\mathbb{Q}}$ sont premiers entre eux. On note $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_L$ et $\mathcal{O}_{KL}$ les anneaux d'entiers respectifs de K, L et KL. Soient $(a_1, \dots, a_r)$ (resp. $(b_1, \dots, b_s)$) une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_L$).

Soit $x = \sum_{i,j} x_{ij} a_i b_j \in \mathcal{O}_{KL}$ avec $x_{ij} \in \mathbb{Q}$. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $x_i = \sum_j x_{ij} b_j$.

d) Montrer, pour tous i, j, que l'on a $D_{K/\mathbb{Q}} x_i \in \mathcal{O}_L$, et donc $D_{K/\mathbb{Q}} x_{ij} \in \mathbb{Z}$.

e) En déduire que $\mathcal{O}_{KL}$ est engendrée par les $a_i b_j$ pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$.

Exercice 2 (Entiers cyclotomiques)

Soient p un nombre premier et $k \geq 1$ un entier. Soient $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{Q}$ et $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine primitive p^k-ème de l'unité. Soit $\mathcal{O}_{p^k}$ l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\xi)$.

a) Montrer l'identité $p = \prod_{r=1..p^k,\, p \nmid r} (1 - \xi^r)$.

b) En utilisant la norme, montrer l'égalité $(\xi - 1)\mathcal{O}_{p^k} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Supposons $k = 1$.

c) En utilisant la trace, en déduire que l'anneau $\mathcal{O}_p$ est égal à $\mathbb{Z}[\xi]$.

Revenons au cas général $k \geq 1$.

d) Montrer que l'on a $\mathcal{O}_{p^k} = \mathbb{Z}[\xi] + p^m \mathcal{O}_{p^k}$ pour tout $m \geq 0$.

e) Calculer le discriminant de l'extension $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$.

f) En déduire que l'anneau $\mathcal{O}_{p^k}$ est égal à $\mathbb{Z}[\xi]$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers premiers entre eux. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ des racines primitives respectivement m-ème et n-ème de l'unité.

g) Montrer $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

h) En déduire que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Exercice 3

Soit A un anneau commutatif unitaire. On appelle *nilradical* de A, que l'on note $\mathrm{Nil}\, A$, l'intersection de tous les idéaux premiers de A. On rappelle que le radical de Jacobson $\mathrm{Rad}\, A$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A.

On suppose que A est *artinien*, c'est-à-dire que toute chaîne décroissante d'idéaux de A est stationnaire à partir d'un certain rang.

a) Montrer que l'on a $\mathrm{Nil}\, A = \mathrm{Rad}\, A$.

On veut à présent prouver que A est aussi noethérien.

b) Soient I et J des idéaux de A et $\mathfrak{P}$ un idéal premier. Montrer que $IJ \subseteq \mathfrak{P}$ implique $I \subseteq \mathfrak{P}$ ou $J \subseteq \mathfrak{P}$.

1. un peu de théorie des nombres montrerait que cette hypothèse découle de celle qui sera faite sur les discriminants plus bas

c) En considérant les inclusions $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \supseteq \ldots$, montrer que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.

On pose $I = \bigcap_{n\geq 0} (\operatorname{Rad} A)^n$. Soit J l'ensemble des $x \in A$ vérifiant $xI = 0$. On suppose $J \neq A$.

d) Montrer qu'il existe $a \in A \smallsetminus J$ tel que si J' est un idéal avec $J \subseteq J' \subsetneq (a) + J$ alors on a $J = J'$.

e) En considérant l'idéal $J + (\operatorname{Rad} A)(a)$, montrer l'inclusion $(\operatorname{Rad} A)(a) \subseteq J$.

f) En déduire $J = A$.

Soient $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ les idéaux maximaux de A.

g) Montrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que l'on ait $(\mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_r)^k = 0$.

h) Conclure que A est noethérien.

Exercice 4

Soient k un corps, $n \geq 1$ un entier et $K = k(X_1, \ldots, X_n)$.

On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur K par permutation des X_i.

a) Montrer que le corps des invariants $K^{\mathfrak{S}_n}$ est isomorphe à K.

On suppose $k = \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe cyclique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, que l'on fait agir de manière naturelle sur K.

b) Supposons G composé de matrices diagonales. Montrer que K^G est isomorphe à K.

c) En déduire que K^G est isomorphe à K pour $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ cyclique.

Exercice 5

Soient $n, m \geq 1$ des entiers. On dit qu'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un *groupe algébrique linéaire* s'il est fermé pour la topologie de Zariski. Un groupe algébrique linéaire G est dit *réductif* si toute représentation linéaire rationnelle [2] de dimension finie de G est semi-simple [3].

Soit G un groupe réductif. Soit V une représentation linéaire rationnelle de dimension finie de G.

a) Montrer qu'il existe un unique projecteur $\pi : V \to V^G$ qui commute à l'action de G.

Soit $\mathbb{C}[V]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V : elle est isomorphe à $\mathbb{C}[e_1, \ldots, e_m]$ si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base duale de V. Le groupe G agit sur $\mathbb{C}[V]$ via $g.f : v \mapsto f(g^{-1}v)$ (pour $g \in G$, $f \in \mathbb{C}[V]$, $v \in V$).

b) Montrer que l'application $\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[V]$ induite par π (et que l'on notera encore π) est un morphisme de $\mathbb{C}[V]^G$-modules.

Soit I l'idéal de $\mathbb{C}[V]$ engendré par l'ensemble des polynômes homogènes non constants de $\mathbb{C}[V]^G$.

c) Montrer que I est de type fini, engendré par des éléments que l'on notera $f_1, \ldots, f_s$.

d) Montrer que tout élément homogène de $\mathbb{C}[V]^G$ est dans la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par $f_1, \ldots, f_s$.

e) En déduire que $\mathbb{C}[V]^G$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini.

2. c'est-à-dire que ses coefficients matriciels sont des polynômes en les coefficients des éléments de G et de l'inverse de leur déterminant

3. c'est-à-dire qu'elle est somme directe de représentations irréductibles