# Théorie de Galois I (TD7)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Avril 2014

**Exercice 1**

Soient $K$ un corps de caractéristique nulle et $K \subseteq L$ une extension galoisienne de degré 3.

a) Déterminer le groupe de Galois de $L/K$.

b) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in K[X]$ irréductible de degré 3 tel que $L$ soit le corps de décomposition de $P$.

c) Donner l'exemple d'un corps $K$ et d'un polynôme $P \in K[X]$ irréductible de degré 3 dont le corps de décomposition est de degré 6 sur $K$.

Soient $\sigma$ l'automorphisme de corps qui fixe les éléments de $K$ et qui envoie $X$ sur $\dfrac{1}{1-X}$ et $G$ le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(K(X)/K)$ engendré par $\sigma$.

d) Montrer que $\sigma$ est un automorphisme d'ordre 3.

e) Montrer que le corps fixe $K(X)^G$ est de la forme $K(T)$, où l'extension $K(T) \subseteq K(X)$ est galoisienne de degré 3 et où $T$ est une fraction rationnelle que l'on explicitera.

Supposons l'existence de $t \in K$ tel que le polynôme

$$P = X^3 - tX^2 + (t-3)X + 1 \in K[X]$$

soit irréductible.

f) Montrer que le corps de décomposition de $P$ est une extension galoisienne de degré 3 de $K$.

g) Que se passe-t-il si on remplace $\sigma$ par l'élément de $\mathrm{Gal}(K(X)/K)$ qui envoie $X$ sur $\dfrac{X+1}{-X+1}$ ?

**Exercice 2 (Extensions quadratiques de quadratiques)**

On note $D_4$ le groupe diédral d'ordre 8 ; on rappelle que c'est l'unique produit semi-direct non trivial de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $P = X^4 + aX^2 + b$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note $\pm\alpha$ et $\pm\beta$ ses racines dans un corps de décomposition $K$.

a) Montrer que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est isomorphe à un sous-groupe de $D_4$. En déduire qu'il est isomorphe à l'un des trois groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad D_4.$$

b) Montrer que l'on a $\alpha^2 - \beta^2 \notin \mathbb{Q}$.

c) Montrer que l'on est dans le premier cas de (a) si et seulement si on a $\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, et que l'on est dans le deuxième si et seulement si on a $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$.

d) Donner des exemples de polynômes correspondant à chacun des trois cas du (a).

e) Déterminer le groupe de Galois de $X^4 - 4X^2 - 1$ et faire la liste des sous-corps de son corps de décomposition.

**Exercice 3**

On rappelle que le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ est défini par les relations suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \ ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j.$$

Soient $\alpha = (2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6})$ et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

a) Montrer que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne, de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On notera $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ les éléments de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ distincts de l'identité.

b) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, le quotient $\sigma(\alpha)\alpha^{-1}$ est le carré d'un élément de $K$ que l'on précisera.

Soient $\delta = \sqrt{\alpha}$ et $L = \mathbb{Q}(\delta)$.

c) Montrer $\delta \notin K$ et en déduire le groupe de Galois de $L/K$.

On note $\tau$ le générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$, que l'on considérera par la suite également comme un élément de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

d) Définir des automorphismes $\widetilde{\sigma}_i$ et $\widetilde{\sigma}_j$ de $L$ sur $\mathbb{Q}$ qui prolongent $\sigma_i$ et $\sigma_j$ respectivement.

On pose $\widetilde{\sigma}_k = \widetilde{\sigma}_i\widetilde{\sigma}_j$.

e) Montrer que le groupe de Galois de l'extension galoisienne $L/\mathbb{Q}$ est isomorphe à $\mathbb{H}_8$.

**Exercice 4 (Formules de Cardan)**

Soit $K$ un corps de caractéristique nulle contenant une racine primitive 3-ème de l'unité que l'on notera $j$. Soient $P = X^3 + aX + b \in K[X]$ un polynôme irréductible et $L$ son corps de décomposition. On note $\alpha, \beta, \gamma \in L$ les racines de $P$.

a) Déterminer les groupes de Galois possibles pour l'extension $L/K$.

b) Montrer que $\mathrm{Gal}(L/K)$ contient un sous-groupe normal $H$ d'ordre 3 que l'on précisera.

c) Montrer que $(\alpha + j\beta + j^2\gamma)^3$ est un élément de $L^H$, et qu'il en est de même de $(\alpha + j^2\beta + j\gamma)^3$.

d) En déduire des expressions explicites de $\alpha, \beta, \gamma$.

+) Comment pourrait-on procéder pour l'équation de degré 4 ?

**Exercice 5 (Galois inverse sur $\mathbb{Q}$, cas abélien fini)**

On utilisera à bon escient les résultats :

- sur la structure des groupes abéliens finis ;
- sur la progression arithmétique faible de Dirichlet.

En pensant aux corps cyclotomiques, montrer que tout groupe abélien fini est groupe de Galois d'une extension galoisienne sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 6 (Hilbert 90)**

Soient $K$ un corps et $L/K$ une extension cyclique (ie. galoisienne de groupe de Galois cyclique) de degré $n$. Soient $\sigma$ un générateur de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $x \in L$.

a) Rappeler pourquoi les éléments de $G$ sont linéairement indépendants.

b) Montrer que $x$ est de norme 1 si et seulement si il existe $y \in L^\times$ tel que l'on ait $x = \dfrac{\sigma(y)}{y}$.

c) En utilisant l'extension $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$, retrouver une paramétrisation rationnelle du cercle.

**Exercice 7 (Extensions d'Artin-Schreier)**

Soient $K$ un corps de caractéristique $p > 0$ et $L/K$ une extension galoisienne de degré $p$. Soit $\sigma$ un générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

a) Montrer qu'il existe $x \in L$ vérifiant $\sigma(x) - x = 1$.

b) Montrer qu'il existe $a \in K^\times$ tel que $L$ soit le corps de décomposition de $X^p - X - a$.