Généralités sur les extensions de corps (TD5)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Mars 2014

Exercice 1
Soient K un corps et α un élément d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Soient $P_\alpha(X)$ et $P_{\alpha^2}(X)$ les polynômes minimaux sur K de α et α^2 respectivement. Montrer que l'on a $[K(\alpha) : K(\alpha^2)] = 2$ si et seulement si on a $P_\alpha(X) = P_{\alpha^2}(X^2)$.

Exercice 2
Soient K un corps et L une extension finie de K. Soient x, y deux éléments de L, et P_x, P_y leur polyôme minimal respectif sur K. Montrer que P_x est irréductible sur $K(y)$ si et seulement si P_y est irréductible sur $K(x)$.

Exercice 3
Soient K un corps et L une extension de K vérifiant $K \subsetneq L \subseteq K(X)$.
a) Montrer que X est algébrique sur L.
b) Vérifier que l'on a $\mathrm{Aut}_K(K(X)) \neq \mathrm{Hom}_K(K(X), K(X))$.

Exercice 4
Soient $K = \mathbb{Q}(T)$ et ses deux sous-corps $K_1 = \mathbb{Q}(T^2)$ et $K_2 = \mathbb{Q}(T^2 - T)$. Montrer que K est algébrique sur K_1 et K_2, mais pas sur $K_1 \cap K_2$.

Exercice 5
Soient K un corps et P un polynôme irréductible de degré n sur K. Soit L une extension finie de K de degré premier à n. Montrer que P est irréductible sur L.

Exercice 6
a) Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
b) Quel est le degré de l'extension par $10^{1/5} + 7^{1/3}$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 7
Déterminer les corps de décomposition des polynômes suivants de $\mathbb{Q}[X]$, ainsi que leur dimension sur $\mathbb{Q}$:

$$X^2 - 3, \quad X^3 - 2, \quad (X^3 - 2)(X^2 - 2), \quad X^6 + X^3 + 1, \quad X^5 - 7.$$

Exercice 8
Soient $j = e^{2i\pi/3} \in \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}(2^{1/3}, j)$.
a) Déterminer le degré de K sur $\mathbb{Q}$, et exprimer K comme le corps de décomposition d'un polynôme bien choisi.
b) Déterminer tous les sous-corps de K ainsi que leur degré.

Exercice 9
Soit $P = X^3 + pX + q$ un polynôme sur $\mathbb{Q}$, dont on notera a, b, c les racines dans $\mathbb{C}$. On pose $d = (a - b)(b - c)(c - a)$.
a) Montrer que l'on a

$$d^2 = -4p^3 - 27q^2 = -\mathcal{R}(P, P') \in \mathbb{Q},$$

où $\mathcal{R}(P, P')$ désigne le résultant de P et P'.
On appelle d^2 le *discriminant* de P.

b) Donner l'exemple d'un polynôme de degré 3 à coefficients rationnels dont le corps de décomposition est de degré 3 sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 10

Soient K un corps et L/K une extension de degré 2. On suppose tout d'abord la caractéristique de K différente de 2.

a) Montrer qu'il existe $x \in L \smallsetminus K$ tel que l'on ait $L = K(x)$ et $x^2 \in K$.

b) Montrer alors l'égalité $L^{\times 2} \cap K^{\times} = K^{\times 2} \sqcup x^2 K^{\times 2}$.

c) Soient $x, y \in K^{\times}$. Montrer que $K(\sqrt{x})$ et $K(\sqrt{y})$ sont isomorphes en tant que K-algèbres si et seulement si yx^{-1} est un carré dans K.

On suppose à partir de maintenant la caractéristique de K égale à 2.

d) Supposons que L n'est pas de la forme $K(x)$ avec $x^2 \in K$. Montrer qu'il existe $z \in L$ tel que l'on ait $L = K(z)$ et $z^2 - z \in K$.

e) En déduire une classification des extensions de degré 2 de K à isomorphisme de K-algèbres près.

Exercice 11

Soient K un corps de caractéristique différente de 2. Soient $x, y \in K^{\times}$.

a) Montrer que l'extension $K(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ de K est de degré 4 si et seulement si on a $x, y, xy \in K^{\times} \smallsetminus K^{\times 2}$.

b) Dans ce cas, montrer que les seuls corps intermédiaires entre K et $K(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ sont K, $K(\sqrt{x})$, $K(\sqrt{y})$ et $K(\sqrt{x}, \sqrt{y})$.

Exercice 12

On va considérer les sous-corps suivants de $\mathbb{C}$: $K = \mathbb{Q}(i)$, $L = K(\sqrt{2})$, $M = K(2^{1/4})$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. Soit $f \in \mathrm{Aut}_K(L)$ l'automorphisme qui envoie $\sqrt{2}$ sur son opposé.

a) Montrer qu'il existe un automorphisme de M qui prolonge f, mais qu'il n'existe pas d'automorphisme involutif de M qui prolonge f.

b) Montrer que tout automorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$ laisse M stable.

c) En déduire qu'il n'existe pas d'automorphisme involutif de $\overline{\mathbb{Q}}$ qui prolonge f.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'application $\bar{\cdot}$ vérifiant :

(i) à tout corps k est associé un corps $\overline{k}$, algébriquement clos et extension algébrique de k, et un morphisme de corps $k \to \overline{k}$;

(ii) à tout morphisme de corps $f : k \to k'$ est associé un morphisme $\overline{f} : \overline{k} \to \overline{k'}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{k} \arrow[r, "\overline{f}"] & \overline{k'} \\ k \arrow[u] \arrow[r, "f"] & k' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

commute et tel que, pour tous f, g on ait $\overline{f \circ g} = \overline{f} \circ \overline{g}$.

On dira qu'il n'existe pas de foncteur « clôture algébrique ».