

Modules et anneaux principaux (TD4)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Mars 2014

Exercice 1

Trouver les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$ -module

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Exercice 2

Soient $n \geq 1$ un entier et f un endomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ de déterminant non nul. Montrer que l'indice de l'image de f dans $\mathbb{Z}^n$ est égal à la valeur absolue du déterminant de f .

Exercice 3

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre et noethérien. Montrer que A est principal si et seulement si tout module de type fini sans torsion sur A est libre.

Exercice 4

Soient K un corps, $n \geq 1$ un entier et $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n . On note p la fonction partition, qui à un entier $i \geq 1$ associe le nombre de façons distinctes de représenter i comme somme d'entiers.

- Exprimer, en fonction de la décomposition en facteurs irréductibles de P , le nombre de classes de similitude de matrices de $M_n(K)$ ayant P pour polynôme caractéristique.
- Expliciter le résultat pour $P = X^2(X-1)^3(X+1)$.

Exercice 5

Soient K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible. Soit V un K -espace vectoriel muni d'un endomorphisme linéaire u de polynôme minimal égal à P . On suppose que V est de dimension finie. Montrer que $\dim_K V$ est divisible par le degré de P .

Exercice 6 (Théorème des deux carrés)

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

- Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

Soient M un $\mathbb{Z}$ -module de type fini et supposons l'existence d'un endomorphisme J de M vérifiant $J^2 = -1$.

- Munir M d'une structure de $\mathbb{Z}[i]$ -module de type fini.

Supposons M libre en tant que $\mathbb{Z}$ -module.

- Montrer que M est libre en tant que $\mathbb{Z}[i]$ -module.
- Montrer que le rang de M sur $\mathbb{Z}$ est pair, disons égal à $2r$, et qu'il existe une base du $\mathbb{Z}$ -module

M dans laquelle la matrice de J est $\begin{pmatrix} 0 & -I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $x = a + ib$ un élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$.

- Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(x)$ est fini, de cardinal $a^2 + b^2$.

Soient p un nombre premier impair et $\Sigma = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{N}\}$.

- En munissant $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'une structure de $\mathbb{Z}[i]$ -module, montrer que p est dans Σ si et seulement si p est congru à 1 modulo 4.

Exercice 7

Soient A un anneau commutatif unitaire et X un ensemble. Soit M un A -module. On note M^X le A -module des fonctions de X dans M .

On dit que M est de *présentation finie* s'il existe des entiers n et m tels que M s'insère dans une suite exacte

$$A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0.$$

- a) Supposons A noethérien et M de type fini sur A . Montrer que M est de présentation finie.
- b) Supposons M de présentation finie. Montrer que l'application naturelle $A^X \otimes_A M \rightarrow M^X$ est un isomorphisme.

Supposons A noethérien.

- c) Montrer que A^X est un A -module plat.
- d) Montrer que l'application canonique $A^X \otimes_A M \rightarrow M^X$ est une injection dont l'image est le sous- A -module de M^X formé des fonctions sur X à valeurs dans un sous- A -module de type fini de M .

Exercice 8 (Arbre de Bruhat-Tits)

Soit p un nombre premier. On note V_0 le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{V}_1$ l'ensemble des sous- $\mathbb{Z}$ -modules d'indice p dans V_0 .

- a) Montrer que tout élément de $\mathcal{V}_1$ contient $p\mathbb{Z} \oplus p\mathbb{Z}$.
- b) En déduire que $\mathcal{V}_1$ est en bijection avec $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$.

Soit V_1 un élément de $\mathcal{V}_1$. Soit $\mathcal{V}_2$ l'ensemble des sous-modules d'indice p de V_1 .

- c) Montrer que $\mathcal{V}_2$ est aussi en bijection avec $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ et qu'il contient un unique sous-module homothétique à V_0 .

On munit l'ensemble (de sommets)

$$\mathcal{T}_p = \{\text{sous-}\mathbb{Z}\text{-modules de } \mathbb{Z}^2 \text{ d'indice une puissance de } p\} / (\text{homothétie})$$

de la structure de graphe suivante : une arête relie v à v' s'il existe des représentants V et V' de v et v' respectivement tels que V est un sous-module d'indice p de V' .

- d) Montrer que l'on a une arête $v \rightarrow v'$ si et seulement si il existe une arête $v' \rightarrow v$.

Les questions suivantes établissent alors que la structure de graphe conférée à $\mathcal{T}_p$ en fait un arbre non orienté.

Soient v et v' deux sommets de $\mathcal{T}_p$.

- e) Montrer qu'il existe des représentants V_0 et V_n de v et v' respectivement ainsi que des V_i pour $1 \leq i \leq n-1$ vérifiant $V_0 \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n$ et tels que V_{i+1} est d'indice p dans V_i pour tout i .

Soient $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0$ des sommets où chaque v_i est relié à v_{i+1} par une arête.

- f) Montrer que l'on a $n = 0$ ou bien ($n \geq 2$ et il existe $1 \leq i \leq n-1$ avec $v_{i+1} = v_{i-1}$).