

# Idéaux premiers, anneaux euclidiens, principaux, factoriels (TD2)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Février 2014

## Exercice 1

Soit  $k$  un corps. Dans  $A = k[x, y]/(x(1 - xy))$ , montrer qu'il existe deux éléments  $a, b$  vérifiant  $(a) \subseteq (b)$  et  $(b) \subseteq (a)$  et tels qu'il existe aussi un élément  $c \in A \setminus A^\times$  vérifiant  $a = cb$ .

## Exercice 2

Exhiber un anneau factoriel  $A$  et deux éléments  $a, b \in A$  de pgcd  $c \in A$  vérifiant  $(a, b) \subsetneq (c)$ .

## Exercice 3

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Montrer que si  $A$  n'est pas un corps, alors  $A[X]$  n'est pas principal.

## Exercice 4

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire.

- On suppose  $A$  intègre et que  $A$  possède un nombre fini d'idéaux. Montrer que  $A$  est un corps.
- On suppose que  $A$  possède un nombre fini d'idéaux. Montrer que tout idéal premier de  $A$  est maximal.
- On suppose que tout idéal propre de  $A$  est premier. Montrer que  $A$  est un corps.

## Exercice 5

Soit  $A$  un anneau factoriel tel que tout idéal premier non nul est maximal.

- Soient  $x, y$  des éléments non nuls de  $A$ , que l'on suppose premiers entre eux. Montrer qu'il existe  $u, v \in A$  vérifiant  $ux + vy = 1$ .
- Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Montrer qu'il existe  $d \in I$  non nul qui est un pgcd de tous les éléments de  $I$ .
- Conclure que  $A$  est principal.

## Exercice 6

Soit  $X$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $C(X, \mathbb{R})$  l'anneau des fonctions continues sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- Déterminer les idéaux maximaux de  $C(X, \mathbb{R})$ .

On munit  $C(X, \mathbb{R})$  de la topologie de la convergence uniforme.

- Montrer que tout idéal premier est contenu dans un unique idéal maximal et qu'il y est dense.  
On pourra utiliser des partitions de l'unité.
- Donner un exemple d'idéal premier non maximal.

## Exercice 7

Soit  $R$  un anneau euclidien qui n'est pas un corps.

- Montrer que l'on peut trouver un élément non inversible  $x$  de  $R$  tel que la restriction à  $R^\times \cup \{0\}$  de la projection canonique de  $R$  sur  $R/(x)$  soit surjective. On pourra choisir  $x$  tel que  $\phi(x)$  soit minimal parmi les éléments  $x \notin R^\times$ , où  $\phi$  désigne le stathme d'une division euclidienne de  $R$ .

Soient  $\alpha = \frac{1 + i\sqrt{19}}{2}$  et  $A = \mathbb{Z}[\alpha]$ .

- b) En s'inspirant de 8.(a), déterminer  $A^\times$ .
- c) Montrer que  $A$  n'est pas euclidien.
- d) Si  $a, b \in A \setminus \{0\}$ , montrer qu'il existe  $q, r \in A$  tels que  $r = 0$  ou  $|r| < |b|$  et qui vérifient, soit  $a = bq + r$ , soit  $2a = bq + r$ .
- e) Montrer que l'idéal engendré par 2 dans  $A$  est maximal.
- f) Montrer que  $A$  est un anneau principal.

### Exercice 8

Soit  $A = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) \in \mathbb{Z}\}$ .

- a) Déterminer le corps des fractions de  $A$ .
- b) Montrer que  $A$  n'est pas factoriel.
- c) Montrer que  $A$  n'est pas noethérien, c'est-à-dire qu'il existe une suite strictement croissante infinie d'idéaux dans  $A$ .
- d) Montrer que  $A$  est de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini de  $A$  est principal.

### Exercice 9 (Polynômes trigonométriques)

Soit  $A = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ .

- a) Montrer l'isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres  $A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ .

On note  $R$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre  $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ .

- b) Montrer que  $R$  est constitué de toutes les fonctions sur  $\mathbb{R}$  pouvant s'exprimer sous la forme

$$f : x \mapsto a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)),$$

où  $n \geq 1$ , et  $a_i, b_i$  sont des réels (avec la convention  $b_0 = 0$ ).

On définit alors le *degré trigonométrique*

$$\deg(f) = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i| + |b_i| \neq 0\} \quad (\text{avec la convention } \deg(0) = -\infty).$$

- c) Montrer l'identité  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$  pour tous  $f, g \in R$ .
- d) En déduire que  $1 - x$  et  $y$  sont des éléments irréductibles de  $A$ .
- e) Conclure que  $A$  est intègre mais que  $A$  n'est pas factoriel.

### Exercice 10 (Résultant de Sylvester)

Soient  $k$  un corps et  $P, Q \in k[X]$  des polynômes de degré respectif  $p$  et  $q$ . On appelle *résultant* de  $P$

et  $Q$ , que l'on note  $\mathcal{R}(P, Q)$  le déterminant de l'application 
$$\begin{array}{ccc} k_{q-1}[X] \times k_{p-1}[X] & \rightarrow & k_{p+q-1}[X] \\ (A, B) & \mapsto & AP + BQ \end{array}.$$

- a) A quelle condition a-t-on  $\mathcal{R}(P, Q) = 0$ ?
- b) En déduire que l'ensemble des nombres algébriques sur  $\mathbb{Q}$  est un corps.