Anneaux, idéaux, divisibilité et approximation (TD1)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Février 2014

Exercice 1

Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal.

a) Montrer que les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I.

b) Soit $J \supseteq I$ un idéal de A. Montrer que A/J est canoniquement isomorphe au quotient de A/I par J/I.

c) Montrer que les idéaux premiers [1] (resp. maximaux) de A/I sont en bijection avec les idéaux premiers (resp. maximaux) de A contenant I.

On va considérer les exemples des anneaux suivants :

$$\mathbb{C}[X], \quad \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1), \quad \mathbb{R}[X]/(X^3-6X^2+11X-6), \quad \mathbb{R}[X]/(X^4-1).$$

d) Déterminer les idéaux premiers de ces anneaux.

e) Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de ces anneaux dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

Exercice 2

Soit k un corps.

a) Montrer que le sous-anneau $k[T^2, T^3]$ de $k[T]$ n'est pas factoriel [2].

b) Montrer que la k-algèbre $k[X,Y]/(X^2-Y^3)$ est isomorphe à $k[T^2,T^3]$.

c) Montrer que la k-algèbre $k[X,Y]/(X^2-Y)$ est isomorphe à $k[T]$.

d) Montrer que la k-algèbre $k[X,Y]/(XY-1)$ n'est pas isomorphe à $k[T]$.

Exercice 3

Soit p un nombre premier. Soit $v_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ l'application uniquement définie par $v_p(0) = +\infty$ et $v_p(p^r m) = r$ si $m \wedge p = 1$.

a) Montrer que l'on a, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y), \quad v_p(x+y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)).$$

b) En déduire que $\begin{array}{rccc} d_p : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & p^{-v_p(x-y)} \end{array}$ définit une distance sur $\mathbb{Z}$ invariante par translation.

On note $\mathcal{Z}_p$ le complété de $(\mathbb{Z}, d_p)$: c'est un anneau topologique dont les éléments peuvent être vus comme des sommes infinies $\sum_{n\geq 0} a_n p^n$ avec les a_i appartenant à $\{0, \ldots, p-1\}$.

c) Montrer que l'injection $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{Z}_p$ induit l'isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_p/p^n\mathcal{Z}_p$ pour tout entier $n \geq 1$.

d) En déduire l'existence d'un morphisme d'anneaux

$$\phi : \mathcal{Z}_p \to \mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \left\{(x_n)_n \in \prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \;\middle|\; x_{n+1} = x_n \mod p^n\right\},$$

qui est un isomorphisme.

1. on rappelle qu'on dit qu'un idéal I de A est premier si l'anneau quotient A/I est intègre. Et on dit qu'il est maximal s'il est propre et maximal pour l'inclusion ; c'est équivalent à la condition « A/I est un corps ».

2. on rappelle qu'un anneau A est dit factoriel s'il est intègre et que tout élément $t \in A$ possède une décomposition finie $t = u\prod_i p_i$ avec $u \in A^\times$ et les p_i irréductibles, unique à permutations des termes et multiplications par des inversibles près.

On munit $\mathbb{Z}_p$ de la topologie produit, chaque $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ étant muni de la topologie discrète.

e) Montrer que ϕ est un isomorphisme d'anneaux topologiques.

f) En déduire deux preuves « distinctes » que $\mathbb{Z}_p$ est compact.

Exercice 4 (Lemme de Hensel)

Soit p un nombre premier.

a) Soit $f \in \mathbb{Z}_p[X]$, de dérivée f'. Soient $x \in \mathbb{Z}_p$ et $n \geq 1$ un entier vérifiant

$$f(x) = 0 \mod p^n, \quad v_p(f'(x)) = 0.$$

Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{Z}_p$ satisfaisant

$$f(y) = 0 \mod p^{n+1}, \quad v_p(f'(y)) = 0, \quad y = x \mod p^n.$$

b) Soient $f \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_m]$, $x = (x_i) \in \mathbb{Z}_p^m$, $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq m$ des entiers. On suppose

$$f(x) = 0 \mod p^n, \quad v_p\Big(\frac{\partial f}{\partial X_j}(x)\Big) = 0.$$

Montrer que f admet un zéro $y \in \mathbb{Z}_p^m$ qui est congru à x modulo p^n.

Exercice 5

Soit k un corps. On note $k[[X]] = \big\{ \sum_{i\geq 0} a_i X^i \;\big|\; a_i \in k \text{ pour tout } i \geq 0 \big\}$ l'anneau des séries formelles en X à coefficients dans k.

a) Montrer que $k[[X]]$ possède un unique idéal maximal, engendré par X.

b) En déduire que $k[[X]]$ est principal, puis qu'il est euclidien.

Exercice 6

Soit k un corps. Soit $A = k[x, y]/(xy)$, définissant une « variété » X. On note $k[\varepsilon]$ la k-algèbre des nombres duaux. Déterminer $X(k[\varepsilon])$.

Exercice 7

Soit k un corps. On note A le sous-anneau de $M_2(k)$ composé des matrices triangulaires supérieures.

a) Déterminer les éléments nilpotents et les éléments inversibles de A.

b) Déterminer les idéaux bilatères de A, ainsi que les quotients correspondants.

Exercice 8 (Théorème des deux carrés)

On considère $\mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss, et on note $\Sigma = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{N}\}$.

a) En introduisant l'application norme

$$\begin{array}{rccc} N : & \mathbb{Z}[i] & \to & \mathbb{Z} \\ & a + ib & \mapsto & (a + ib)(a - ib) \end{array},$$

déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

b) Montrer que Σ est stable par multiplication.

c) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

Soit p un nombre premier.

d) Montrer que p est un élément de Σ si et seulement si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

e) En utilisant l'isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$, montrer que p est un élément de Σ si et seulement si on a $p = 2$ ou $p \equiv 1 \mod 4$.

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\prod_p p^{v_p(n)}$ sa décomposition en facteurs premiers.

f) Montrer que n est un élément de Σ si et seulement si $v_p(n)$ est pair pout tout premier $p \equiv 3 \mod 4$.