Autour du produit semi-direct (TD3)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

Soient $G = N \rtimes H$ et K un sous-groupe de G contenant N. Montrer que l'on a $K = N \rtimes (K \cap H)$.

Exercice 2

Soient k un corps et n un entier strictement positif.

a) Montrer que la suite exacte du déterminant

$$1 \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times \to 1$$

est scindée. Montrer que $\mathrm{GL}_n(k)$ peut s'écrire comme un produit direct $\mathrm{SL}_n(k) \times k^\times$ si et seulement si $x \mapsto x^n$ est un automorphisme de $k^\times$.

b) Soient $B(k)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ des matrices triangulaires supérieures et $U(k)$ celui des matrices unipotentes supérieures. Montrer que la suite exacte

$$1 \to U(k) \to B(k) \to T(k) \to 1$$

est scindée.

c) Montrer que la suite exacte induite par le déterminant

$$1 \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$$

se scinde. Pour quelles valeurs de n, le produit est-il direct ?

Exercice 3

Soient N et H deux groupes.

a) Soient $\psi : H \to \operatorname{Aut} N$ un morphisme et α un automorphisme de H. Définissons la composée $\varphi = \psi \circ \alpha : H \to \operatorname{Aut} N$. Montrer que $N \rtimes_\psi H$ et $N \rtimes_\varphi H$ sont isomorphes.

b) Supposons H cyclique. Soient ψ et φ deux morphismes $H \to \operatorname{Aut} N$ vérifiant $\psi(H) = \varphi(H)$. Montrer que $N \rtimes_\psi H$ et $N \rtimes_\varphi H$ sont isomorphes.

c) Soient $\psi : H \to \operatorname{Aut} N$ un morphisme et β un automorphisme intérieur de $\operatorname{Aut} N$. Soit $\varphi = \beta \circ \psi : H \to \operatorname{Aut} N$. Montrer que $N \rtimes_\psi H$ et $N \rtimes_\varphi H$ sont isomorphes.

Exercice 4

a) Soient $p < q$ deux nombres premiers. Selon la congruence de q modulo p, classifier les groupes d'ordre pq.

b) En déduire que tout groupe d'ordre $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou au groupe diédral D_q.

Exercice 5

On définit le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ par les relations suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

a) Soit G un groupe d'ordre 8. En discutant les ordres des éléments, montrer que G est isomorphe à l'un des groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,\ D_4,\ \mathbb{H}_8.$$

b) Vérifier que le groupe des quaternions n'est pas un produit semi-direct non trivial.
c) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ possède un seul 2-Sylow et l'identifier.

Exercice 6
a) En se rappelant que tous les p-Sylow sont conjugués, déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.
b) Soient φ et ψ deux morphismes non triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit le morphisme $\begin{array}{cccc} \varphi_k : & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \to & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \\ & x & \mapsto & \varphi(kx) \end{array}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ tels que l'on ait $\psi = P\varphi_k P^{-1}$.
c) En déduire l'existence et l'unicité à isomorphisme près d'un produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
d) Montrer que le centre de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
e) Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ des matrices triangulaires supérieures unipotentes est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Identifier son centre.

Exercice 7
Soient N, H et E des groupes s'insérant dans une suite exacte

$$1 \to N \to E \xrightarrow{\pi} H \to 1.$$

Dans ce cas-là, on dit que E est une *extension* de H par N. Une application ensembliste $t : H \to E$ est appelée *section* de π si elle vérifie $t(1) = 1$ et si $\pi \circ t$ est l'identité de H.
a) Soit t une section de π. Définissons les applications ensemblistes

$$\begin{array}{cccc} f : & H \times H & \to & N \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & t(\alpha)t(\beta)t(\alpha\beta)^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \varphi : & H & \to & \mathrm{Aut}\, N \\ & \alpha & \mapsto & (n \mapsto t(\alpha)nt(\alpha)^{-1}) \end{array}.$$

Montrer que le *système de facteurs* (f, φ) vérifie les propriétés suivantes :
(i) $f(\alpha, 1) = f(1, \alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in H$, et $\varphi(1)$ est l'identité de $\mathrm{Aut}\, N$;
(ii) $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = f(\alpha, \beta)\varphi(\alpha\beta)f(\alpha, \beta)^{-1}$ pour tous $\alpha, \beta \in H$;
(iii) $f(\alpha, \beta)f(\alpha\beta, \gamma) = \varphi(\alpha)(f(\beta, \gamma))f(\alpha, \beta\gamma)$ pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in H$.
b) Soient $f : H \times H \to N$ et $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\, N$ deux applications ensemblistes vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Montrer que (f, φ) fait de $N \times H$ une extension de H par N, *i.e.* que l'on peut munir $N \times H$ d'une structure de groupe (isomorphe à E si (f, φ) est le système de facteurs défini au (a)).

Exercice 8
Soient I un ensemble fini et $\{G_i \mid i \in I\}$ un ensemble de groupes. On définit le *produit libre* $\star_I G_i$ comme étant l'ensemble des mots sur l'union disjointe $\coprod_I G_i$ (avec pour « simplifications » $ab \sim c$ si a, b, c sont des éléments d'un même G_i, dans lequel ils vérifient $ab = c$) et pour loi de composition la concaténation. On a des inclusions canoniques $\varphi_j : G_j \hookrightarrow \star_I G_i$.
a) Montrer que $\star_I G_i$ vérifie la propriété universelle suivante : si H est un groupe muni d'une famille de morphismes $(f_i : G_i \to H)_{i \in I}$, alors il existe un unique morphisme $f : \star_I G_i \to H$ tel que l'on ait $f_i = f \circ \varphi_i$ pour tout $i \in I$.

On appelle *groupe libre* sur I le produit libre $\star_I \mathbb{Z}$.
b) Identifier les groupes libres commutatifs.
c) Soit J un ensemble fini. En examinant leurs groupes dérivés, montrer que les groupes libres respectivement sur I et J sont isomorphes si et seulement si I et J ont même cardinal.
d) Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ induit une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On introduit s et u comme étant les images respectives dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant le lemme de ping-pong de Klein, montrer que l'on a

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \simeq < s > \star < u > \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$