Actions de groupes (TD2)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

a) Décrire les actions possibles de $\mathfrak{S}_3$ sur un ensemble à 4 éléments.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X.

b) Supposons qu'il y ait deux orbites, l'une d'ordre m, l'autre d'ordre n. Définir un morphisme $G \to \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$.

c) Supposons maintenant $m = 3$, $n = 2$, $|X| = 5$ et l'action fidèle. Quelles sont les possibilités pour G ?

Exercice 2 (Lemme d'Ore)

Soient G un groupe fini et p le plus petit facteur premier divisant l'ordre de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est normal.

Exercice 3 (Formule de Burnside)

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. Le *fixateur* de $g \in G$ est le sous-ensemble de X défini par $\operatorname{Fix} g = \{x \in X \mid gx = x\}$.

a) En considérant $\{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$, montrer que le nombre d'orbites est égal à $|G|^{-1} \sum_G |\operatorname{Fix} g|$.

b) Quel est le nombre de sacs de n billes que l'on peut former avec N couleurs ?

c) Quel est le nombre de colliers (orientés) de n perles que l'on peut former avec N couleurs ?

Exercice 4 (Premier théorème de Sylow)

Soient G un groupe fini d'ordre $p^\alpha m$ avec p premier et $p \nmid m$. Un sous-groupe de G d'ordre p^α est appelé *p-Sylow*.

a) Soient p premier et $n \geq 1$. Exhiber un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

b) Soient H et S deux sous-groupes de G. Supposons que S soit un p-Sylow de G. Montrer qu'il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H.

c) Conclure quant à l'existence d'un p-Sylow dans G.

Exercice 5 (Suite des théorèmes de Sylow)

Soient G un groupe fini et p un diviseur premier de $|G|$.

a) Montrer que tous les p-Sylow de G sont conjugués.

b) Montrer que leur nombre divise $|G|$ et est congru à 1 modulo p.

Exercice 6 (Base de Burnside)

Soient p un nombre premier, P un p-groupe et N un sous-groupe propre de P. On définit le *sous-groupe de Frattini* $\Phi(P)$ de P comme l'intersection de ses sous-groupes propres maximaux.

a) Montrer que N est distinct de son normalisateur dans P.

b) Montrer que N est maximal si et seulement si il est d'indice p.

c) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de P. Montrer que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ engendre P si et seulement si $\{x_1\Phi(P), \ldots, x_n\Phi(P)\}$ engendre $P/\Phi(P)$.

d) En déduire que les parties génératrices minimales de P ont même cardinal.

Exercice 7

Soit V un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur un corps k. On appelle *drapeau (complet)* de V une suite $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ de sous-espaces vectoriels.

a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(k)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux de k^n. Quel est le stabilisateur d'un élément ?

b) Soient D_0 et D_1 deux drapeaux de k^n tels que D_0 est associé à la base canonique. Montrer qu'il existe une matrice unipotente supérieure u et une matrice de permutation w telles que wu envoie D_0 sur D_1.

c) Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur l'ensemble des couples de drapeaux distincts de k^n n'est pas transitive. Identifier les orbites.

Exercice 8 (Lemme de ping-pong de Klein)

Soient G un groupe et $\{g_i \mid i \in I\}$ un système de générateurs de G. On dit que G est *libre* sur les $(g_i)_{i\in I}$ si toute relation $g_1^{\alpha_1} \dots g_r^{\alpha_r} = 1$ dans G avec, pour tout $1 \leq j \leq r-1$, $g_j \neq g_{j+1}$ entraîne $\alpha_j = 0$ pour tout j.

Pour tout $i \in I$, notons G_i le sous-groupe de G engendré par g_i. Soit S un ensemble sur lequel G agit. On suppose l'existence, pour tout $i \in I$, d'un sous-ensemble S_i de S et d'un point de $s \in S \smallsetminus \bigcup_i S_i$ vérifiant : pour tous $j \neq i$ et $g \in G_i \smallsetminus \{1\}$, on a $g(S_j) \subseteq S_i$ et $g(s) \in S_i$.

a) Montrer que G est libre sur les $(g_i)_{i\in I}$.

b) Soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent un sous-groupe libre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

c) Est-ce aussi le cas pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 9

a) Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$.

b) En utilisant la simplicité de $\mathfrak{A}_6$, exhiber un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$ qui envoie H sur le stabilisateur d'un point. Conclure.

Exercice 10

On rappelle que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ agit naturellement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

a) En déduire une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

b) Montrer que cette action est fidèle. Identifier le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$.

Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X. Une partie F de X est appelée *domaine fondamental* pour l'action de G sur X si elle vérifie, pour tout $g \in G \smallsetminus \{1\}$:

$$\text{(i) } \overline{F^\circ} = F, \quad \text{(ii) } X = \bigcup_{h\in G} hF, \quad \text{(iii) } F^\circ \cap (gF)^\circ = \varnothing.$$

Soit $D = \{z \in \mathcal{H} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$.

c) En maximisant la partie imaginaire des éléments d'une orbite $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})z$, montrer que D vérifie la propriété (ii).

d) Montrer que D est un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$.

e) En déduire que les images de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.