Divers exercices des examens passés (TD13)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1 (Théorème de Molien)
Soient G un groupe fini et k un corps algébriquement clos de caractéristique première à $|G|$. Soit V une représentation de dimension finie de G sur k. On assimile SV à l'algèbre des polynômes sur V^* et on définit l'espace d'invariants $(SV)^G = \{v \in SV \mid \forall g \in G,\, gv = v\}$.

a) Montrer que $\pi^G = \dfrac{1}{|G|} \sum_G g$ est un projecteur de SV d'image $(SV)^G$.

b) Soit $g \in G$. Montrer la formule $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{tr}(g|_{S^n V}) t^n = \dfrac{1}{\det(1 - g^{-1}t)}$.

On définit la *série de Poincaré* $\mathcal{P}((SV)^G)(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dim_k((S^n V)^G) t^n$.

c) Montrer l'égalité $\mathcal{P}((SV)^G)(t) = \dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \dfrac{1}{\det(1 - gt)}$.

Supposons $k = \mathbb{C}$.

d) Soit W l'unique représentation irréductible de dimension 2 de $\mathbb{H}_8$. Déterminer $(SV)^{\mathbb{H}_8}$.

Exercice 2 (Partiel 2008)

a) Montrer que $\mathfrak{S}_5$ a 7 classes de conjugaison et calculer le cardinal de chaque classe.

b) Montrer que les représentations de degré 1 de $\mathfrak{S}_5$ sont la représentation triviale $\mathbb{1}$ et la signature ε.

Soit ρ la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$ dans l'hyperplan U d'équation $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i = 0$ de $\mathbb{C}^5$.

c) Calculer le caractère χ_ρ de ρ. Montrer que $\rho \otimes \varepsilon$ est une représentation irréductible non isomorphe à ρ.

On rappelle que l'on a un isomorphisme de représentations $(U \otimes U, \rho \otimes \rho) \simeq (\mathrm{Sym}^2 U, \mathrm{Sym}^2 \rho) \oplus (\bigwedge^2 U, \bigwedge^2 \rho)$ correspondant à la décomposition d'un tenseur en somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

d) Calculer $\chi_{\bigwedge^2 \rho}$. En déduire que $\bigwedge^2 \rho$ est irréductible et que $\bigwedge^2 \rho$ est isomorphe à $\bigwedge^2 \rho \otimes \varepsilon$. En déduire qu'il existe 2 représentations de $\mathfrak{S}_5$ irréductibles de dimension 5 non isomorphes entre elles.

e) Calculer $\chi_{\mathrm{Sym}^2 \rho}$ et montrer que $\mathrm{Sym}^2 \rho = \mathbb{1} \oplus \rho \oplus V$ pour une représentation irréductible V de dimension 5 de $\mathfrak{S}_5$.

f) Dresser la table des caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 3 (Partiel 2009)
Dans cet exercice et le suivant, « représentation » signifie « représentation linéaire dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ». Si V est une représentation d'un groupe fini G, χ_V sera son caractère. Soit H un groupe fini. Soient $(W_i)_{1 \le i \le r}$ un système de représentants des classes de représentations irréductibles de H. Soit W une représentation de H ; on note a_i la multiplicité de W_i dans W.

a) Montrer que $\sum_H |\chi_W(h)|^2$ est un multiple entier de $|H|$ que l'on exprimera à l'aide des a_i.

b) On suppose $\sum_H |\chi_W(h)|^2 = 2|H|$. Montrer qu'alors W est somme directe de deux représentations irréductibles non isomorphes.

Soit G un groupe fini tel que H en soit un sous-groupe d'indice 2 (donc distingué). On note $\varepsilon : G \to \{\pm 1\}$ l'homomorphisme de noyau H et L la représentation de dimension 1 de G de caractère ε. Soit

V une représentation de G ; on note $V(\varepsilon)$ la représentation $V \otimes L$.

c) Exprimer $\chi_{V(\varepsilon)}(g)$ à l'aide de $\chi_V(g)$ pour $g \in H$ et pour $g \notin H$.

On suppose V irréductible. On note W la représentation de H déduite de V par restriction ; W est donc définie par le morphisme composé $H \to G \to \mathrm{GL}(V)$ et W a même espace sous-jacent que V.

d) Montrer l'égalité $\sum_H |\chi_W(h)|^2 = n|H|$ avec $n = 1$ ou 2.

e) Montrer que l'on a $n = 1$ si et seulement si V n'est pas isomorphe à $V(\varepsilon)$, et que dans ce cas-là W est irréductible. Montrer que dans le cas contraire, on a $\chi_V(g) = 0$ pour $g \notin H$.

On fixe un élément t de G n'appartenant pas à H. On note $\tau : H \to H$ l'automorphisme $h \mapsto tht^{-1}$. Si E est une représentation de H, on note $\widetilde{E}$ la représentation de H ayant même espace sous-jacent que E donnée par la composée de la représentation E avec $\tau : H \to H$. Soit V une représentation irréductible de G et W la représentation de H déduite de V par restriction.

On suppose $n = 2$, de sorte que l'on a $W = W' \oplus W''$ avec W' et W'' irréductibles non isomorphes.

f) Montrer que l'application linéaire $\phi : W \to W$, $x \mapsto tx$ est un isomorphisme de représentations de W sur $\widetilde{W}$.

g) Montrer la décomposition $\widetilde{W} = \widetilde{W}' + \widetilde{W}''$ avec $\widetilde{W}'$ et $\widetilde{W}''$ irréductibles. En déduire que ϕ induit un isomorphisme de représentations de W' sur $\widetilde{W}''$ et de W'' sur $\widetilde{W}'$. (On pourra utiliser le lemme de Schur.)

Exercice 4 (Partiel 2009)

On reprend les notations de l'exercice 2.

Soit $V = \bigwedge^2 \rho$. Soit W la représentation du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ déduite de V par restriction.

a) Montrer la décomposition $W = W' \oplus W''$ pour des représentations irréductibles W' et W'' non isomorphes de $\mathfrak{A}_5$.

On fait opérer le groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$ par conjugaison sur l'ensemble C_5 des 5-cycles de $\mathfrak{S}_5$.

b) Montrer que le stabilisateur d'un 5-cycle a est le groupe cyclique engendré par a. En déduire que C_5 est réunion disjointe de deux classes de conjugaison sous $\mathfrak{A}_5$, représentées par le cycle $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et le cycle $b = (2\ 1\ 3\ 4\ 5) = tat$, où $t = (1\ 2)$.

c) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ a 5 classes de conjugaison, représentées par 1, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2)(3\ 4)$, a et b. Donner le cardinal de chaque classe de conjugaison.

d) En utilisant la question (g) de l'exercice 3, montrer que pour tout x de $\mathfrak{A}_5$, on a $\chi_{W'}(txt) = \chi_{W''}(x)$. Montrer que si $\chi_{W'}(a) = \alpha$ et $\chi_{W'}(b) = \beta$, alors $\chi_{W''}(a) = \beta$ et $\chi_{W''}(b) = \alpha$; et calculer le couple (α, β).

e) Compléter la table des caractères de $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 5 (Partiel 2006)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur ou égal à 2.

a) Rappeler pourquoi il y a exactement $|G|^{-1} \sum_G |\mathrm{Fix}\, g|$ orbites de G dans X.

b) Démontrer l'inégalité $|G|^{-1} \sum_G |\mathrm{Fix}\, g|^2 \geq 2$. (On pourra considérer l'action de G sur $X \times X$.)

On suppose maintenant que l'action de G sur X est transitive.

c) Démontrer que au moins $|X|^{-1}|G|$ éléments de G agissent sur X sans aucun point fixe. (On pourra sommer sur g la quantité $(|\mathrm{Fix}\, g| - 1)(|X| - |\mathrm{Fix}\, g|)$.)

Exercice 6 (Examen 2007)

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soient V un k-espace vectoriel de dimension n et V^* son dual. On munit $V \oplus V^*$ de la forme bilinéaire $b : ((x, f), (y, g)) \mapsto f(y) + g(x)$ et on note $\mathcal{H}(V) = (V \oplus V^*, b)$.

a) Montrer que $\mathcal{H}(V)$ est non dégénéré et que Vet V^* sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux.

Soit W un k-espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme bilinéaire symétrique φ non dégénérée.

b) Montrer que W contient un sous-espace totalement isotrope V de dimension n si et seulement si (W, φ) est isomorphe à $\mathcal{H}(V)$.