Représentations linéaires des groupes finis II (TD12)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

Soient k un corps et G un groupe fini. Si on assimile l'algèbre de groupes $k[G]$ à l'espace de fonctions $G \to k$, on appelle *représentation régulière à gauche* (resp. *à droite*) la représentation d'espace $k[G]$ avec action de $h \in G$ donnée par $h.f : g \mapsto f(h^{-1}g)$ (resp. $h.f : g \mapsto f(gh)$).
Montrer que les représentations régulières à gauche et à droite de G sont isomorphes.

Exercice 2

Soient k un corps, G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Soit V une représentation de dimension finie de G sur k. Montrer que l'espace d'invariants V^H est naturellement muni d'une structure de module à droite sur $\mathrm{End}_{k[G]}(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1})$, où $\mathbb{1}$ désigne la représentation triviale de H.

Exercice 3 (Théorème de Frobenius)

Soient $n \geq 1$ un entier et G un groupe fini. Soient X un ensemble à n éléments muni d'une action transitive de G, $x_0 \in X$ et H le stabilisateur de x_0. On suppose que tout élément de G autre que l'identité fixe au plus un élément de X.
Soient G_1 l'ensemble des éléments de G qui agissent sur X sans point fixe et $G_0 = G_1 \cup \{1\}$.

a) Déterminer le cardinal de G_0.

Soient χ_σ le caractère de la $\mathbb{C}$-représentation de permutation donnée par l'action de G sur X, χ_1 le caractère de la représentation triviale et $\chi = \chi_\sigma - \chi_1$.

b) Montrer que χ est un caractère.

Soient ψ un caractère irréductible de H et ψ_G le caractère de l'induite de H à G. On pose $\phi = \psi_G - \psi(1)\chi$.

c) Montrer que ϕ est un caractère irréductible de G.

d) En déduire que G_0 est un sous-groupe normal de G.

Exercice 4 (Critère de Mackey)

Soient G un groupe fini et k un corps algébriquement clos de caractéristique première à $|G|$. Soient H et K deux sous-groupes de G et (ρ, W) une représentation de H sur k. On pose $V = \mathrm{Ind}_H^G W$.
Soit $\mathcal{S}$ un système de représentants de $K\backslash G/H$ contenant 1. Pour $s \in \mathcal{S}$, on pose $H_s = sHs^{-1} \cap K$ et on dénote W_s la représentation de H_s correspondant au morphisme $\begin{array}{rccc} \rho^s : & H_s & \to & \mathrm{GL}(W) \\ & x & \mapsto & \rho(s^{-1}xs) \end{array}$.

a) Montrer que V est isomorphe à $\bigoplus_{\mathcal{S}} \mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$ en tant que K-représentation.

b) Montrer que V est irréductible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) W est irréductible ;

(ii) pour tout $s \in \mathcal{S} \smallsetminus \{1\}$, W_s et $W|_{H_s}$ ne s'entrelacent pas.

Exercice 5

Soient A un groupe abélien fini, G un produit semi-direct fini $A \rtimes H$ et k un corps algébriquement clos de caractéristique première à $|G|$.
Le groupe H agit sur $X := \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ par $h.\chi : a \mapsto \chi(h^{-1}ah)$ pour tous $h \in H, \chi \in X, a \in A$.
Soit $(\chi_i)_{i \in I}$ un ensemble de représentants des orbites de X sous H. Pour tout i, on note $G_i = \{h \in H \mid h.\chi_i = \chi_i\}$ et H_i son image par la projection $G \to H$. Soit $(\theta_i^j)_{j \in J_i}$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de représentations de H_i, et on les voit comme des G_i-représentations à

travers $G_i \to H_i$.
Pour tout $i \in I$ et tout $j \in J_i$, on pose $\rho_i^j = \mathrm{Ind}_{G_i}^G \chi_i \otimes \theta_i^j$.

a) Montrer que ρ_i^j est irréductible.

b) Montrer que ρ_i^j et $\rho_{i'}^{j'}$ sont isomorphes si et seulement si $i = i'$ et $j = j'$.

c) Montrer que toute représentation irréductible de G est isomorphe à l'un des ρ_i^j.

Exercice 6 (Représentations complexes de $\mathfrak{S}_n$)
Soient $n \geq 1$ un entier et λ une partition de n, *i.e.* une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ d'entiers naturels vérifiant $n = \sum_k \lambda_k$ avec $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$ pour tout k. A cette partition λ, on associe un *tableau de Young* T_λ, qui est un tableau de n cases alignées à gauche dans lequel la i-ème ligne a λ_i colonnes.
Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ s'identifie au groupe de permutations des cases de T_λ. On définit alors les sous-groupes P_λ et Q_λ comme étant respectivement le stabilisateur des lignes et des colonnes de T_λ.
On appelle *projecteurs de Young* les éléments

$$a_\lambda = \frac{1}{|P_\lambda|} \sum\nolimits_{P_\lambda} g, \quad b_\lambda = \frac{1}{|Q_\lambda|} \sum\nolimits_{Q_\lambda} \varepsilon(g)\, g,$$

où $\varepsilon(g)$ désigne la signature de la permutation g. On pose $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$.

a) Supposons $g \in \mathfrak{S}_n \smallsetminus P_\lambda Q_\lambda$. Montrer qu'il existe une transposition $t \in P_\lambda$ vérifiant $g^{-1}tg \in Q_\lambda$.

b) En déduire l'existence d'une application linéaire $l_\lambda : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{C}$ telle que l'on ait $a_\lambda g b_\lambda = l_\lambda(g) c_\lambda$ pour tout $g \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

Soit μ une partition de n. On introduit l'ordre lexicographique sur les partitions de n : on a $\lambda > \mu$ s'il existe $j \geq 1$ tel que $\lambda_j > \mu_j$ et $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i < j$.

c) Supposons $\lambda > \mu$. Montrer que l'on a $a_\lambda \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] b_\mu = 0$.

Soit A une algèbre. Un élément $e \in A$ est dit *idempotent* s'il vérifie $e^2 = e$.

d) Montrer que pour tout A-module à gauche M, on a $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \simeq eM$.

e) Montrer que c_λ est proportionnel à un idempotent de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

Soit V_λ la représentation de $\mathfrak{S}_n$ donnée par multiplication à gauche sur l'espace $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda$.

f) Montrer que l'application $\lambda \mapsto V_\lambda$ induit une bijection entre l'ensemble des partitions de n et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7
On garde les notations de l'exercice précédent. Soit U_λ la représentation $\mathrm{Ind}_{P_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C}$.

a) Montrer que la représentation obtenue par multiplication à gauche sur $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]a_\lambda$ est isomorphe à U_λ.

b) Montrer la décomposition $U_\lambda = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$, où les $K_{\mu\lambda}$ sont des entiers naturels avec $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Les entiers $K_{\mu\lambda}$ sont appelés *nombres de Kostka*.
On définit les ensembles suivants, qui correspondent à ajouter ou enlever une case sur le tableau de Young T_λ :

$$A(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n+1 \mid \exists j, \forall i, \nu_i = \lambda_i + \delta_{ij}\},$$

$$R(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n-1 \mid \exists j, \forall i, \nu_i = \lambda_i - \delta_{ij}\}.$$

c) Montrer que V_λ est isomorphe à $\bigoplus_{\nu \in R(\lambda)} V_\nu$ en tant que $\mathfrak{S}_{n-1}$-représentation.

d) Montrer que $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V_\nu \simeq \bigoplus_{\lambda \in A(\nu)} V_\lambda$ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}_n$-représentations.