Représentations linéaires des groupes finis I (TD11)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

Soient p un nombre premier et k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe. Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur k.

Exercice 2

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2. Déterminer les représentations irréductibles du groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$ sur k.

Exercice 3

a) Déterminer la table de caractères du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ sur $\mathbb{C}$.

b) Déterminer les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_4$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4

Soient k un corps et G un groupe agissant sur un ensemble fini X. On note kX l'espace vectoriel de base les éléments de X ; c'est une G-représentation de dimension finie.

a) Supposons que X est l'union disjointe de X_1 et X_2 et que cette décomposition est stable par G. Montrer que kX est isomorphe à $kX_1 \oplus kX_2$.

b) Soient X_3 et X_4 deux ensembles finis munis d'une action de G, et $X = X_3 \times X_4$. Montrer que kX est isomorphe à $kX_3 \otimes kX_4$.

Exercice 5 (Théorème de Perlis-Walker)

Soient G et H deux groupes abéliens finis. Pour tout entier $d \geq 1$, on note $G^{(d)} = \{x^d \mid x \in G\}$.

a) On suppose $|G^{(d)}| = |H^{(d)}|$ pour tout $d \geq 1$. Montrer que G et H sont isomorphes.

b) On suppose que $\mathbb{Q}[G]$ et $\mathbb{Q}[H]$ sont isomorphes en tant qu'algèbres. Montrer que G et H sont isomorphes.

Exercice 6

Soient G un groupe fini et X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Soient ρ la représentation de permutation sur $\mathbb{C}$ obtenue et χ son caractère.

a) Montrer la décomposition $\rho = 1 \oplus \theta$, où θ ne contient pas la représentation triviale 1.

On fait opérer diagonalement G sur le produit $X \times X$: $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tous $g \in G$ et $x, y \in X$.

b) Montrer que le caractère de la représentation de permutation sur $X \times X$ est égal à χ^2.

c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'action de G sur X est doublement transitive ;

(ii) on a l'égalité $\langle \chi^2, 1 \rangle = 2$;

(iii) la représentation θ est irréductible.

Exercice 7

Soit k un corps de caractéristique nulle. Soient G un groupe fini et V une représentation fidèle de dimension finie de G.

a) Montrer qu'il existe un vecteur $v \in V^*$ qui n'est stabilisé par aucun élément non trivial de G.

On assimile l'algèbre symétrique SV à l'algèbre des polynômes sur V^*, et on définit le morphisme d'algèbres $\begin{array}{cccc} \Phi_v : & SV & \to & k[G] \\ & f & \mapsto & \sum_G f(gv)e_g \end{array}$.

b) Montrer que Φ_v est surjective et compatible à l'action de G.

c) En déduire que toute G-représentation irréductible s'injecte dans un S^nV pour un certain n.

Exercice 8

Soient p un nombre premier, $f \geq 1$ un entier et $q = p^f$. Soit G le groupe $\{x \mapsto ax+b \mid a \in \mathbb{F}_q^\times,\ b \in \mathbb{F}_q\}$.

a) Déterminer la table des caractères de G sur $\mathbb{C}$.

b) Déterminer les représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.

Exercice 9

Soient F un corps et $\overline{F}$ une clôture algébrique fixée de F. Soient G un groupe fini et V, W deux représentations de G de dimensions finies sur F.

Pour tout corps $E \supseteq F$, on note $V_E = V \otimes_F E$ la représentation obtenue sur E.

a) Montrer l'isomorphisme de E-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_{E[G]}(V_E, W_E) \simeq E \otimes_F \mathrm{Hom}_{F[G]}(V, W).$$

Une représentation V est dite *absolument irréductible* si, pour tout $E \supseteq F$, V_E est irréductible.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) V est absolument irréductible ;

(ii) $V_{\overline{F}}$ est irréductible ;

(iii) $\mathrm{Hom}_{\overline{F}[G]}(V_{\overline{F}}, V_{\overline{F}})$ est isomorphe à $\overline{F}$;

(iv) $\mathrm{Hom}_{F[G]}(V, V)$ est isomorphe à F.

c) Supposons $E \supseteq \overline{F}$ algébriquement clos. Montrer que $V \mapsto V \otimes_{\overline{F}} E$ est une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles sur $\overline{F}$ et celles sur E.

Exercice 10

Soient p un nombre premier et N le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p et $\mu_p(k)$ le sous-groupe de $k^\times$ composé des racines p-ièmes de l'unité. Définissons les éléments suivants de N :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit V le k-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{F}_p \to k$. Pour $z \in \mu_p(k)$, on définit la représentation ρ_z, d'espace V, par :

$$\rho_z(\alpha)f : x \mapsto f(x-1), \quad \rho_z(\beta)f : x \mapsto z^x f(x).$$

a) Montrer que ρ_z est irréductible si et seulement si $z \in \mu_p(k) \smallsetminus \{1\}$.

b) Déterminer toutes les représentations de dimension 1 de N, et les comparer à la décomposition de ρ_1.

c) Déterminer toutes les représentations irréductibles de N.

On suppose $k = \mathbb{C}$.

d) Déterminer la table des caractères de N.

e) Calculer les produits tensoriels de représentations irréductibles de N.