Groupes : exemples et généralités (TD1)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1

Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est monogène. Montrer que G est abélien.

Exercice 2

a) Montrer que tout groupe d'ordre inférieur ou égal à 5 est abélien. Et pour l'ordre 6 ?

b) Pour chacun des groupes suivants, déterminer ses sous-groupes ; lesquels sont normaux (et dans ce cas-là, déterminer le quotient) ?

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \mathfrak{S}_3 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2),\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{S}_4,\ \mathfrak{A}_4 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3).$$

Exercice 3

a) Un sous-groupe d'un groupe finiment engendré est-il nécessairement finiment engendré ?

b) Et s'il est d'indice fini ?

Exercice 4

On dit qu'un groupe G est d'*exposant* e si e est le plus petit entier $n \geq 1$ vérifiant $g^n = 1$ pour tout élément g de G.

a) Montrer que tout groupe d'exposant 2 est abélien.

b) Pour quels entiers e un groupe d'exposant e est-il nécessairement abélien ?

Exercice 5

Soit G un groupe fini.

a) Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués ?

b) Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels (a) a une réponse positive. Un exemple non abélien ?

Exercice 6

Soient G un groupe et H un sous-groupe normal de G.

a) Soit K un sous-groupe normal de H. Est-il normal dans G ?

b) Définir une notion de *sous-groupe caractéristique* telle que si K est un sous-groupe caractéristique de H, alors K est un sous-groupe normal de G.

c) Soit F un corps. Montrer que $(F, +)$ ne possède pas de sous-groupe caractéristique propre.

Exercice 7

Soient G un groupe et H un sous-groupe normal.

a) Montrer que les sous-groupes normaux de G/H sont de la forme K/H, où K est un sous-groupe normal de G qui contient H.

b) Montrer que l'on a un isomorphisme $(G/H)/(K/H) \simeq G/K$.

c) Soit K un sous-groupe quelconque de G. Montrer que $K \cap H$ est normal dans K.

d) Montrer que $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ est un sous-groupe de G, égal à KH.

e) Montrer que H est normal dans HK.

f) Montrer que l'on a $K/(K \cap H) \simeq (KH)/H$.

Exercice 8 (Théorème de Cayley et variantes)

Soit G un groupe fini d'ordre n.

a) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
b) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{n+2}$.
c) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ pour tout corps k.
d) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9

Soit G un groupe fini d'ordre $n \geq 2$.

a) Montrer que G possède un système de générateurs $\{a_1, \ldots, a_k\}$ vérifiant : pour tout $i \geq 2$, a_i n'appartient pas au sous-groupe engendré par $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.
b) Montrer l'inégalité $|\mathrm{Aut}\, G| \leq n^{\log_2 n}$.

Exercice 10

a) Soient k un corps et $n \geq 1$. Montrer que le diagramme suivant est commutatif, exact en lignes et en colonnes.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mu_n(k) \arrow[r] \arrow[d] & k^\times \arrow[r, "\det"] \arrow[d] & k^{\times n} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{SL}_n(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_n(k) \arrow[r, "\det"] \arrow[d] & k^\times \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{PSL}_n(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{PGL}_n(k) \arrow[r, "\det"] \arrow[d] & k^\times/k^{\times n} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

b) Soit

$$0 \to A \to B \to C \to D \to 0$$

une suite exacte de groupes abéliens. Montrer qu'il existe un unique (à isomorphisme près) groupe abélien E tel que les suites courtes

$$0 \to A \to B \to E \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to E \to C \to D \to 0$$

soient exactes.

Exercice 11 (Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

a) Soit G un groupe monogène. Montrer que le groupe des automorphismes de G est en bijection avec l'ensemble des générateurs de G.
b) Soient p un nombre premier impair et $\alpha \geq 1$. Quel est l'ordre de $1+p$ dans $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$? En déduire $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$.
c) Expliciter $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ pour $\alpha \geq 1$.
d) Pour quels entiers $n \geq 1$ le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?