Produit tensoriel (TD10)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1
Soient k un corps et $k^{\mathbb{N}}$ le k-espace vectoriel des suites à valeurs dans k. Montrer que l'application k-linéaire naturelle $\Phi : k^{\mathbb{N}} \otimes_k k^{\mathbb{N}} \to k^{\mathbb{N}^2}$ est injective mais non surjective.

Exercice 2
Soient k un corps et V, W deux espaces vectoriels sur k.

a) Montrer que l'application linéaire $\begin{array}{rccc} \iota : & V^* \otimes_k W & \to & \mathrm{Hom}_k(V, W) \\ & \varphi \otimes w & \mapsto & (v \mapsto \varphi(v)w) \end{array}$ est injective.

b) Déterminer l'image des tenseurs purs.

c) A quelle condition ι est-elle un isomorphisme ?

On suppose V de dimension finie. Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V, et $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ sa base duale. On appelle $\sum_i v_i^* \otimes v_i \in V^* \otimes_k V$ l'*élément de Casimir*.

d) Montrer que l'élément de Casimir est indépendant de la base choisie.

Exercice 3
Soient k un corps et V, W deux espaces quadratiques non dégénérés de dimension finie (on omettra par abus les formes quadratiques associées).

a) Définir naturellement une forme quadratique sur $V \otimes_k W$, et montrer que si V ou W est hyperbolique, alors $V \otimes W$ l'est aussi.

On définit l'ensemble $\mathcal{W}_k = \{k\text{-espaces quadratiques non dégénérés de dimension finie}\}/\mathcal{R}$ où la relation d'équivalence est : $V \,\mathcal{R}\, W$ s'il existe H et H' deux espaces hyperboliques tels que $V \oplus^\perp H$ et $W \oplus^\perp H'$ sont isométriques.

b) Montrer que $(\mathcal{W}_k, \oplus^\perp, \otimes_k)$ est un anneau, qu'on appelle *anneau de Witt* de k.

c) Supposons k algébriquement clos. Montrer que $\mathcal{W}_k$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2$.

d) Montrer que $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Soient p un nombre premier impair, $f \geq 1$ et $q = p^f$.

e) Montrer que $\mathcal{W}_{\mathbb{F}_q}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ si q est congru à 1 modulo 4, et à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si q est congru à 3 modulo 4.

Exercice 4
Soient k un corps et A, B deux k-algèbres.

a) Montrer que la multiplication définie par $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ munit $A \otimes_k B$ d'une structure de k-algèbre.

b) Montrer que les k-algèbres $k[x] \otimes_k k[y]$ et $k[x, y]$ sont isomorphes.

c) Montrer que le morphisme d'algèbres $k(x) \otimes_k k(y) \to k(x, y)$ est injectif mais non surjectif.

Exercice 5

a) Décrire la structure de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

b) Montrer que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ possède deux structures de $\mathbb{C}$-algèbres distinctes.

c) Montrer que les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $M_2(\mathbb{C})$ sont isomorphes.

d) Montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ est isomorphe à $M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Soient k un corps et A, B deux k-algèbres graduées.

a) Montrer qu'il existe sur $A \otimes B$ une structure naturelle de k-algèbre graduée telle que

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')}(aa' \otimes bb').$$

On note $A \otimes_k^{\mathrm{su}} B$ l'algèbre ainsi obtenue. Soient V et W sont deux espaces vectoriels sur k.

b) Montrer que l'on a un isomorphisme d'algèbres $\bigwedge(V \oplus W) \simeq \left(\bigwedge V\right) \otimes_k^{\mathrm{su}} \left(\bigwedge W\right)$.

Exercice 7

Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subseteq E$ deux corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension finie, de base $\{1, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. On suppose l'existence d'un groupe G d'ordre n composé de F-automorphismes de E tel que le corps fixe $E^G = \{e \in E \mid \forall g \in G, ge = e\}$ est exactement F.

a) Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants.

Soit V un espace vectoriel sur E, muni d'une action semi-linéaire de G. On définit son sous-F-espace vectoriel des G-invariants $V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G, gv = v\}$.

b) Vérifier que l'application E-linéaire $V^G \otimes_F E \xrightarrow{\eta} V$ canonique est compatible à l'action de G.

c) Montrer que η est un isomorphisme.

Exercice 8

Soient k un corps, A une k-algèbre commutative et $\alpha : k \to A$ le morphisme structurel (c'est l'injection donnée par la définition pour A d'être une k-algèbre). Soit $\pi : A \otimes_k A \to A$ le morphisme induit par la multiplication.

a) Montrer que $I := \operatorname{Ker} \pi$ est l'idéal de $A \otimes A$ engendré par les $1 \otimes a - a \otimes 1$ pour $a \in A$.

Soit M un B-module.

On dit qu'une application k-linéaire $d : A \to M$ est une *dérivation* si elle vérifie $d(xy) = (dx)y + x(dy)$ pour tous $x, y \in A$. On note $\mathcal{D}_k(A, M)$ l'ensemble des k-dérivations de A dans M.

b) Montrer que $\mathcal{D}_k(A, M)$ est un sous-A-module de $\operatorname{Hom}_k(A, M)$ et que tout élément d de $\mathcal{D}_k(A, M)$ vérifie $d \circ \alpha = 0$.

On munit $A \otimes_k A$ de sa structure de A-algèbre à gauche.

c) Montrer que $\begin{array}{cccc} \phi : & \operatorname{Hom}_k(A, M) & \to & \operatorname{Hom}_A(A \otimes A, M) \\ & f & \mapsto & (x \otimes y \mapsto x f(y)) \end{array}$ est un isomorphisme de A-modules.

d) Montrer que l'image de $\mathcal{D}_k(A, M)$ par ϕ est le sous-A-module de $\operatorname{Hom}_A(A \otimes A, M)$ dont les éléments s'annulent sur $A \otimes 1$ et sur $I^2 = \{\sum ij \mid i, j \in I\}$.

On appelle *module des différentielles* de A sur k, et on note $\Omega^1_{A/k}$, le A-module I/I^2.

e) Vérifier que les structures de module A-module à gauche et à droite coïncident sur $\Omega^1_{A/k}$. Définir une dérivation $d_\Omega : A \to \Omega^1_{A/k}$, qui sera dite universelle.

f) Montrer la propriété universelle suivante : pour tout A-module N et toute k-dérivation $d : A \to N$, il existe un unique morphisme de A-modules $u : \Omega^1_{A/k} \to N$ vérifiant $d = u \circ d_\Omega$.

Une *connexion* sur M est un morphisme de groupes abéliens $\nabla : M \to \Omega^1_{A/k} \otimes_A M$ vérifiant $\nabla(am) = a\nabla(m) + (d_\Omega a) \otimes m$ pour tout $a \in A$ et $m \in M$. Pour $i \geq 1$, on définit $\Omega^i_{A/k} = \bigwedge^i \Omega^1_{A/k}$.

g) Montrer que $\begin{array}{cccc} \nabla_i : & \Omega^i_{A/k} \otimes_A M & \to & \Omega^{i+1}_{A/k} \otimes_A M \\ & \omega \otimes m & \mapsto & d_\Omega \omega \otimes m + (-1)^i \omega \wedge \nabla(m) \end{array}$ définit bien une application k-linéaire.

h) Montrer que $\nabla_1 \circ \nabla : M \to \Omega^2_{A/k} \otimes_A M$ est un morphisme A-linéaire, appelé la *courbure* de la connexion ∇.

Exercice 9

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et V un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $z \in \bigwedge^2 V$ un 2-vecteur. On dit que z est *décomposable* s'il existe $u, v \in V$ tel que $z = u \wedge v$.

a) Supposons $\dim V = 3$. Montrer que z est décomposable si et seulement si $z \wedge z = 0 \in \bigwedge^4 V$.

b) Montrer le critère précédent par récurrence sur la dimension de V.