Schéma de Picard et courbes elliptiques

M. Tibouchi

23 mai 2006

Résumé

Après avoir introduit le foncteur de Picard relatif et établi formellement certaines des propriétés du schéma qui le représente sous réserve qu'il existe, on montre que le schéma de Picard d'une courbe elliptique existe bien, et que sa composante neutre est isomorphe à la courbe elle-même.

1 Le foncteur $\mathrm{Pic}_{X/S}$

Soit X un S-schéma.[1] On rappelle que $\mathrm{Pic}(X)$ désigne le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X, la loi de groupe étant le produit tensoriel. Pic est un foncteur contravariant, puisque si $f : X \to Y$ est un morphisme de S-schémas et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur Y, $f^*\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X, et que le produit tensoriel commute à f^*.

Lorsque X est par exemple une courbe projective lisse sur un corps k algébriquement clos, $\mathrm{Pic}(X)$ est (au facteur $\mathbf{Z}$ près) l'ensemble des k-points d'une k-variété abélienne (i.e. d'un k-schéma en groupes propre de type fini), appelée la jacobienne de X. Cette « algébrisabilité » est un résultat très important de la théorie des courbes, car les variétés abéliennes sont une structure assez riche et rigide.

On sait complètement décrire le foncteur des points de la jacobienne J d'une telle courbe X/k : on a pour tout k-schéma T, $(J \times \mathbf{Z})(T) = \mathrm{Pic}(X \times_k T)/\,\mathrm{Pic}(T)$. Cela conduit à définir le *foncteur de Picard relatif* d'un S-schéma X quelconque :

$$\mathrm{Pic}_{X/S}(T) = \mathrm{Pic}(X \times_S T)/\,\mathrm{Pic}(T)$$

On peut s'imaginer $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ comme, dans les bons cas, le groupe des familles de faisceaux inversibles sur X paramétrées par T, au sens précis suivant.

Proposition 1. *On suppose que X est projectif et plat sur S, muni d'une section $\omega : S \to X$, et que le morphisme naturel $\mathscr{O}_S \to f_*\mathscr{O}_X$ est un isomorphisme universel.*[2] *Alors pour tout S-schéma T de type fini, deux faisceaux inversibles*

[1] Tous les schémas que l'on va considérer sont noethériens, par prudence...

[2] D'après [Gro63] 7.8.8, il suffit, pour que cette dernière condition soit vérifiée, que X soit de type fini à fibres géométriquement intègres. Merci à David Madore et à Sandra Rozensztajn pour cette remarque.

$\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sur $X_T = X \times_S T$ ont même image dans $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ *si et seulement si $\mathscr{L}_t \cong \mathscr{M}_t$ pour tout $t \in T$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau inversible sur X_T, et $p : X_T \to T$ la projection. Il s'agit dont de voir que $\mathscr{F}_t \cong \mathscr{O}_{X_t}$ pour tout $t \in T$ si et seulement s'il existe un faisceau inversible $\mathscr{G}$ sur T tel que $\mathscr{F} \cong p^*\mathscr{G}$.

Dans un sens c'est clair : si $\mathscr{F} \cong p^*\mathscr{G}$, on a $\mathscr{F}_t \cong i^*\mathscr{G}$, où $i : X_t \to T$ est la composée $X_t = X \times_S \operatorname{Spec} k(t) \to \operatorname{Spec} k(t) \to T$, donc :

$$\mathscr{F}_t \cong \big(\mathscr{G} \otimes k(t)\big) \otimes_{k(t)} \mathscr{O}_{X_t} \cong \mathscr{O}_{X_t}$$

Réciproquement, soit $\mathscr{F}$ un faisceau inversible sur X_T tel que pour tout t, $\mathscr{F}_t \cong \mathscr{O}_{X_t}$, et soit $\mathscr{G} = p_*\mathscr{F}$. La situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
X_t \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_T \arrow[d, "p"'] \\
\operatorname{Spec} k(t) \arrow[r, "u"] \arrow[u, bend left, "\omega_t"] & T \arrow[u, bend right, "\omega_T"']
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\omega_T \circ p$ est une immersion fermée de T dans X_T, et donc $(\omega_T \circ p)_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est un isomorphisme le long de $\omega_T(T)$ (et nul ailleurs). Il en résulte par adjonction que la flèche :

$$u^*\mathscr{G} \to u^*\omega_T^*\mathscr{F} = \omega_t^* u'^*\mathscr{F}$$

est un isomorphisme. Or elle se factorise par l'application canonique $u^*p_*\mathscr{F} \to p'_*u'^*\mathscr{F}$. Il en résulte que l'application $k(t)$-linéaire :

$$\mathscr{G} \otimes k(t) \to H^0(X_t, \mathscr{F}_t) = H^0(X_t, \mathscr{O}_{X_t}) = k(t)$$

est un isomorphisme. Le théorème de « changement de base propre »[3] que $\mathscr{G}$ est localement libre, donc un faisceau inversible sur T. Mais alors on dispose d'un morphisme naturel de $\mathscr{O}_{X_T}$-modules $p^*\mathscr{G} \to \mathscr{F}$, qui est un isomorphisme sur X_t pour tout $t \in T$ d'après ce qu'on a vu précédemment, donc un isomorphisme global. □

[3]On utilisera la formulation suivante, [Har77] III 12.11. On peut trouver des résultats plus précis dans [Gro63] 7.8.

Théorème 1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas noethériens, $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X plat sur Y, et y un point de Y. Alors si la flèche naturelle $\phi^q(y) : R^q f_*(\mathscr{F}) \otimes k(y) \to H^q(X_y, \mathscr{F}_y)$ est surjective, c'est un isomorphisme, et $\phi^q(y')$ est encore un isomorphisme pour tout y' dans un voisinage convenable de y. De plus, $R^q f_*(\mathscr{F})$ est alors localement libre au voisinage de y si et seulement si $\phi^{q-1}(q)$ est surjective.*

2 Quelques propriétés du schéma de Picard

En toute généralité, $\mathrm{Pic}_{X/S}$ n'est même pas un faisceau pour la topologie de Zariski, mais sous des hypothèses assez faible, il est représentable. Grothendieck a en effet démontré :

Théorème (Grothendieck, 1962). *Si X est projectif et plat sur S à fibres géométriquement intègres, et si le morphisme structural $f : X \to S$ a une section, alors le foncteur $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représentable par un certain S-schéma $\mathbf{Pic}_{X/S}$ localement de type fini.*

On se propose de démontrer formellement quelques propriétés de $\mathbf{Pic}_{X/S}$ en supposant qu'il existe. On supposera au moins X projectif sur S, et $\mathbf{Pic}_{X/S}$ localement de type fini.

Une première remarque évidente, bien sûr, est que, puisque $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est en fait un foncteur en groupes abéliens, $\mathbf{Pic}_{X/S}$ est un schéma en groupes abéliens. En effet, la loi de groupe sur $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ pour tout T détermine une transformation naturelle $\mathrm{Pic}_{X/S} \times \mathrm{Pic}_{X/S} \to \mathrm{Pic}_{X/S}$, qui d'après le lemme de Yoneda provient d'un morphisme de S-schémas $\mathbf{Pic}_{X/S} \times_S \mathbf{Pic}_{X/S} \to \mathbf{Pic}_{X/S}$ vérifiant par fonctorialité les axiomes d'une loi de groupe dans la catégorie des S-schémas.

Par ailleurs, sous de bonnes hypothèses sur X, disons X lisse sur S à fibres géométriquement intègres, $\mathbf{Pic}_{X/S}$ est *formellement* propre. Cela se vérifie par le critère valuatif de propreté. Il s'agit de montrer que si R est un anneau de valuation discrète, de corps résiduel K, et qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,K \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{Pic}_{X/S} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,R \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists!"] & \mathrm{Spec}\,S \end{tikzcd}$$

alors le morphisme $\mathrm{Spec}\,K \to \mathbf{Pic}_{X/S}$ s'étend de manière unique en un morphisme $\mathrm{Spec}\,R \to \mathbf{Pic}_{X/S}$. Énoncée sur le foncteur des points, cela dit que la flèche $\mathrm{Pic}_{X/S}(\mathrm{Spec}\,R) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(\mathrm{Spec}\,K)$ est un isomorphisme. Comme $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\,R) = \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\,K) = 0$ (les modules inversibles sur un anneau local et sur un corps sont libres), il s'agit de voir que, si l'on note $Y = X \times_S \mathrm{Spec}\,R$ et $U = X \times_S \mathrm{Spec}\,K$ sa fibre générique sur $\mathrm{Spec}\,K$, on a $\mathrm{Pic}(Y) \tilde{\to} \mathrm{Pic}(U)$. Or, vu les hypothèses faites sur X, Y est un K-schéma de type fini, séparé, intègre et régulier (donc localement factoriel), ce qui assure que son groupe de Picard coïncide en fait avec le groupe des classes de diviseurs de Weil. La flèche d'image réciproque des faisceaux inversibles correspond à celle qui à un diviseur de Weil premier D sur Y autre que la fibre spéciale $Z = Y - U$ associe le diviseur premier $D \cap U$, et envoie Z sur 0. Cette flèche est clairement surjective : un diviseur premier D_0 dans U est l'image de son adhérence $D = \overline{D_0}$ dans Y. De plus, comme U et Y ont même corps de fonctions, le noyau est constitué des classes des diviseurs à support dans $Y - U$, donc est engendré par la classe de Z. Mais le faisceau d'idéaux définissant Z est l'image réciproque dans Y de l'idéal *principal* de R définissant le point fermé, donc sa classe est triviale, ce qui conclut.

Si l'on sait que le schéma en groupes $\mathbf{Pic}_{X/S}$ est localement de type fini, alors on peut en déduire de manière purement formelle ([Kle00] 5.1) que sa composante neutre $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ est un sous-schéma ouvert et fermé, *de type fini* sur S à fibres géométriquement irréductibles. En particulier, si X/S est lisse à fibres géométriquement intègres, $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ est propre (et plus seulement formellement propre), donc c'est un schéma abélien et ses fibres sont des variétés abéliennes.

Encore une chose qui se voit de manière formelle est l'espace tangent en l'élément neutre. Pour simplifier, on se place dans le cas où $S = \operatorname{Spec} k$ est le spectre d'un corps, de sorte que l'« élément neutre » $e : \operatorname{Spec} k \to \mathbf{Pic}_{X/k}$ est effectivement un point.[4] Dans ce cas, l'espace tangent en e s'identifie à l'ensemble des morphismes $\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \to \mathbf{Pic}_{X/k}$ qui valent e en restriction à $\operatorname{Spec} k$, donc, vu sur le foncteur des points, il correspond au noyau du morphisme $\operatorname{Pic}(X[\varepsilon]) \to \operatorname{Pic}(X)$. Pour calculer ce noyau, on rappelle que pour tout espace annelé $(Z, \mathscr{O}_Z)$, $\operatorname{Pic}(Z) = H^1(Z, \mathscr{O}_Z^*)$ (ce qui est clair, c'est que $\operatorname{Pic}(Z)$ s'identifie au premier groupe de cohomologie de Čech ; on peut donc travailler en cohomologie de Čech, ou si l'on préfère, utiliser le fait, [Har77] Ex. III 4.4, que $\check{H}^1 = H^1$). Mais dans ce cas, on a sur $X[\varepsilon]$ une suite exacte de faisceaux abéliens :

$$0 \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}^*_{X[\varepsilon]} \to \mathscr{O}^*_X \to 0$$

où la première flèche envoie une section locale a sur $1+\varepsilon a$. L'exactitude se vérifie facilement sur les anneaux locaux : il s'agit de voir que si A est l'anneau local de X en un point x (de X ou $X[\varepsilon]$, les espaces sous-jacents sont les mêmes), l'application $A \to A[\varepsilon]^*$, $a \mapsto 1+\varepsilon a$ est injective ; que l'image de ce morphisme est formé des éléments de $A[\varepsilon]^*$ qui s'envoient sur 1 dans A^* ; et enfin que tout élément de A^* provient par passage au quotient d'un élément de $A[\varepsilon]^*$. Ces trois affirmations sont évidentes. De plus, la suite exacte est scindée par l'inclusion $\mathscr{O}^*_X \to \mathscr{O}^*_{X[\varepsilon]}$, donc elle reste exacte après application du foncteur $H^1(X[\varepsilon], -)$. On obtient donc :

$$0 \to H^1(X, \mathscr{O}_X) \to \operatorname{Pic}(X[\varepsilon]) \to \operatorname{Pic}(X) \to 0$$

ce qui montre que l'espace tangent de Zariski $T_e\mathbf{Pic}_{X/k}$ est en bijection avec $H^1(X, \mathscr{O}_X)$. A priori, c'est une bijection ensembliste, mais en déroulant les identifications successives, on peut vérifier que c'est même un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Comme $\mathbf{Pic}_{X/k}$ est un schéma en groupes, les translations sont des automorphismes et donc tous les points fermés de corps résiduel k ont le même espace tangent. Donc, quitte à effectuer un changement de base pour rendre k algébriquement clos, on en déduit :

$$\dim \mathbf{Pic}_{X/k} \leqslant \dim_k H^1(X, \mathscr{O}_X)$$

et on a même égalité si $\mathbf{Pic}_{X/k}$ est lisse en e, ce qui est toujours vrai en caractéristique nulle (par un théorème de Cartier qui affirme qu'un schéma en groupes localement de type fini sur un corps de caractéristique 0 est lisse).

[4]Dans le cas d'une base quelconque, l'objet à étudier serait, je suppose, $e^*\mathscr{T}_{X/S}$, le tiré en arrière suivant l'élément neutre $e : S \to \mathbf{Pic}_{X/S}$ du faisceau tangent relatif ; on doit pouvoir dire dessus des choses assez analogues.

3 Le cas d'une courbe elliptique

Pour finir, nous allons calculer le schéma de Picard d'une courbe elliptique (et voir que c'est essentiellement la courbe elle-même). Rappelons qu'une courbe elliptique E sur un schéma S est un schéma projectif lisse dont les fibres sont des courbes géométriquement intègres de genre 1, et muni d'une section $\omega : S \to E$ du morphisme structural.

On commence par définir un sous-foncteur abélien $\mathrm{Pic}^0_{E/S}$ de $\mathrm{Pic}_{E/S}$ (qui sera la composante neutre) par la relation $\mathrm{Pic}^0_{E/S}(T) = \mathrm{Pic}^0(E_T)/\operatorname{Pic}(T)$, où $\mathrm{Pic}^0(E_T)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(E_T)$ formé des faisceaux inversibles qui sont de degré 0 sur chaque fibre E_t, $t \in T$. Comme, pour $\mathscr{F}$ un faisceau inversible sur E_T, le degré $\deg(\mathscr{F}_t)$ est une fonction localement constante de t (car c'est la caractéristique d'Euler, qui est bien localement constante d'après [Gro63] 7.9.4), on a en fait une suite exacte scindée de préfaisceaux abéliens sur les S-schémas :

$$0 \to \mathrm{Pic}^0_{E/S} \to \mathrm{Pic}_{E/S} \to \mathbf{Z} \to 0$$

une section de la surjection étant fournie par $\mathscr{L}(\omega)$. On va montrer que E représente $\mathrm{Pic}^0_{E/S}$. Il en résultera donc que $\mathbf{Pic}_{E/S}$, comme schéma, est la réunion disjointe d'une famille indexée par $\mathbf{Z}$ de copies de E.

Proposition 2. *Soit $J = E$, et $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0_{E/S}(J)$ la classe du faisceau sur $E \times_S J$ donné par $\mathscr{L}(\Delta) \otimes p_1^*\mathscr{L}(-\omega)$, où $\Delta \subset E \times_S E$ est la diagonale. Alors le couple $(J, \mathscr{L})$ représente le foncteur $\mathrm{Pic}^0_{E/S}$.*

Démonstration. Il s'agit de voir que pour tout S-schéma T et tout $\mathscr{M}$ faisceau inversible sur E_T de degré 0 sur les fibres, il existe un unique morphisme $f : T \to J$ tel que $\mathscr{M} = f^*\mathscr{L}$ dans $\mathrm{Pic}^0_{E/S}(T)$.

Soit $p : E_T \to T$ et $q : E_T \to E$ les deux projections, et notons $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \otimes q^*\mathscr{L}(\omega)$. Alors $\mathscr{M}'$ est de degré 1 sur les fibres E_t, $t \in T$, qui sont des courbes de genre 1. Il en résulte par le théorème de Riemann-Roch que $H^0(E_t, \mathscr{M}'_t) = k(t)$ et $H^1(E_t, \mathscr{M}'_t) = 0$. Comme p est projectif et $\mathscr{M}'$ est plat sur T, le théorème 1 s'applique (en vrai, si T est noethérien...). La nullité des H^1 sur les fibres assure que $R^1p_*\mathscr{M}' \otimes k(t) \to H^1(E_t, \mathscr{M}'_t)$ est surjectif, donc c'est un isomorphisme et le faisceau $R^1p_*\mathscr{M}'$ est nul. En particulier, il est localement libre, et donc $p_*\mathscr{M}' \otimes k(t) \to H^0(E_t, \mathscr{M}'_t)$ est surjectif, ce qui assure que $p_*\mathscr{M}'$ est un faisceau localement libre de rang 1 sur T.

Quitte à remplacer alors $\mathscr{M}$ par $\mathscr{M} \otimes p^*p_*(\mathscr{M}')^{-1}$ (qui est dans la même classe modulo $\mathrm{Pic}(T)$), on peut supposer que $p_*\mathscr{M}' \cong \mathscr{O}_T$. La fonction constante $1 \in H^0(T, \mathscr{O}_T)$ détermine alors une section globale $m \in H^0(E_T, \mathscr{M}')$, qui définit donc un certain diviseur de Cartier effectif $Z \subset E_T$. Par construction, il y a dans chaque fibre de p un unique point de Z, donc le morphisme $Z \to E_T \to T$ est fini (quasi-fini et propre) de degré 1, ce qui suffit pour obtenir[5]que c'est un

[5]C'est clair une fois qu'on a la platitude de Z sur T, qui n'est pas très difficile à montrer sous ces hypothèses. Cf. par exemple Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, §10–4. Merci à Hugues Randriam.

isomorphisme. Par conséquent, on dispose d'une section $s : T \to Z \to E_T$ de p. Alors le morphisme f recherché est le composé $q \circ s : T \to E = J$.

En effet, comme Z est le graphe de f, on a $Z = f^*\Delta$ comme diviseur. Donc $\mathscr{M}' = \mathscr{L}(Z) = f^*\mathscr{L}(\Delta)$. En tensorisant par $\mathscr{L}(-\omega)$, on obtient le résultat voulu. $\square$

Tout cela donne une construction très canonique de la loi de groupe sur une courbe elliptique, qui ne pose en particulier aucun problème de rationnalité, contrairement à des définitions plus « manuelles » avec lesquelles il n'est pas toujours évident que la loi de groupe d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Z}[1/N]$, par exemple, est également définie sur $\mathbf{Z}[1/N]$.

Références

[Gro63] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (17) :91, 1963.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Kle00] Steven Kleiman. The Picard scheme. Notes de l'école d'été de Trieste, 2000.