

Construction d'un modèle semi-stable pour certaines variétés de Siegel [d'après Genestier]

M. Tibouchi

19 octobre 2006

Résumé

On présente dans ses grandes lignes la construction par de Jong et Genestier d'une résolution semi-stable de l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g avec structure de niveau $\Gamma_0(p)$ lorsque $g = 2$ ou 3 .

1 Introduction

Dans le but de permettre, par exemple, le calcul des facteurs locaux correspondants de la fonction zêta de Hasse-Weil, on s'intéresse souvent à la construction, pour une variété de Shimura donnée, de modèles locaux pas trop singuliers aux places de mauvaise réduction.

On considérera dans la suite le cas particulier de la variété de Siegel de genre g avec structure de niveau $\Gamma_0(p)$ pour un certain nombre premier p , qui a l'interprétation modulaire suivante : c'est le champ $\mathcal{S}(g, p)$ sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ qui paramétrise les schémas abéliens principalement polarisés A , de dimension relative g , et munis d'un drapeau de sous-schémas en groupes finis et plats de $A[p]$ isotropes pour l'accouplement de Weil. C'est un champ algébrique séparé de type fini sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, lisse sur $\text{Spec } \mathbf{Z}[1/p]$, mais la structure locale en la place de mauvaise réduction p est moins bien comprise, et les singularités peuvent être assez importantes. $\mathcal{S}(g, p)$ n'est en tout cas pas semi-stable en p pour $g > 1$.

Pour $g = 2$ ou 3 , on va cependant exhiber, suivant de Jong et Genestier, une résolution semi-stable de $\mathcal{S}(g, p)$, c'est-à-dire un morphisme propre $\widetilde{\mathcal{S}}(g, p) \rightarrow \mathcal{S}(g, p)$ qui soit un isomorphisme au-dessus de $\text{Spec } \mathbf{Z}[1/p]$, et de source semi-stable en p .

On commence en fait par remplacer $\mathcal{S}(g, p)$ par un certain *modèle local* $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ construit par de Jong, et dont Rapoport et Zink ont par la suite donné un analogue pour une large classe de problèmes de modules « parahoriques ». Ce modèle local a l'avantage de s'exprimer en termes d'algèbre linéaire (c'est un fermé d'un produit de grassmanniennes dont le foncteur des points est défini par des conditions linéaires), et en étudiant la combinatoire d'une certaine stratification

naturelle dont il est muni, on va construire une suite finie explicite d'éclatements qui, dans les cas $g = 2$ et 3 , fourniront une résolution semi-stable de $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$. On verra ensuite comment en déduire une résolution de $\mathcal{S}(g, p)$ elle-même.

2 Le champ $\mathcal{S}(g, p)$

La variété de Siegel $\mathcal{S}(g, p)$ représente, comme on l'indiquait plus haut, le foncteur qui à un schéma S associe l'ensemble des triplets :

$$(A, \lambda, 0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_g)$$

où A est un S -schéma abélien de dimension relative g , λ une polarisation principale, et $0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_g \subset A[p]$ un drapeau de sous-schémas en groupes finis et plats de $A[p]$, avec H_i de rang p^i sur S pour tout i , et H_g (totalement) isotrope pour l'accouplement de Weil $A[p] \times A[p] \rightarrow \mu_p$ induit par λ .

Notons que $\mathcal{S}(g, p)$, vue sur \mathbf{Q} , est une variété de Shimura associée au groupe $\text{GSp}(2g)$ au sens suivant. Si l'on note $V = \mathbf{Q}^{2g}$ le \mathbf{Q} -espace vectoriel muni de la forme symplectique standard de matrice :

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{I}_g \\ -\tilde{I}_g & 0 \end{pmatrix}$$

avec \tilde{I}_g la matrice antidiagonale usuelle, $\mathcal{S}(g, p)$ est, dans le formalisme de Deligne, la variété de Shimura $Sh(\mathbf{G}, \{h\})_{\mathbf{K}}$, où \mathbf{G} est le \mathbf{Q} -groupe réductif $\text{GSp}(V)$, $\{h\}$ est la classe de l'homomorphisme de Hodge $h : \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{R}}$ qui envoie i sur \tilde{I} , et $\mathbf{K} = K^p K_p$ est le sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbf{A}_f)$ donné par $K^p = \mathbf{G}(\mathbf{A}_f^p)$ et $K_p \in \mathbf{G}(\mathbf{Z}_p)$ est le sous-groupe de Iwahori des similitudes symplectiques triangulaires inférieures modulo p .

Elle admet une autre interprétation modulaire commode (qui a une génération naturelle aux variétés de Shimura de type PEL avec structure de niveau parahorique). À un schéma S , on associe l'ensemble des triplets $(A_\bullet, \lambda_0, \lambda_g)$ formés :

1. d'une suite $A_\bullet = (A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_g} A_g)$ de S -schémas abéliens A_i , où chaque α_i est une isogénie de degré p ;
2. de polarisations principales λ_0 et λ_g de A_0 et A_g telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_g} & A_g \\ p\lambda_0 \downarrow & & \downarrow \lambda_g \\ \widehat{A}_0 & \xleftarrow{\alpha_1^\vee} \cdots \xleftarrow{\alpha_g^\vee} & \widehat{A}_g \end{array}$$

L'isomorphisme entre les deux problèmes de module consiste à associer à (A, λ, H_\bullet) la suite $A_i = A/H_i$ avec pour morphismes α_i les projections. L'existence d'une polarisation λ_g sur A_g rendant le diagramme commutatif résulte de l'isotropie de H_g .

3 Le modèle local de Rapoport-Zink

Pour décrire localement la géométrie de $\mathcal{S}(g, p)$, on commence par construire, comme indiqué dans l'introduction, un espace $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ défini de manière plus maniable auquel on va pouvoir ramener l'étude. Précisément, on va construire un diagramme de champs sur $\text{Spec } \mathbf{Z}_p$:

$$\mathcal{S}(g, p) \xleftarrow{\varphi} \mathcal{T}(g, p) \xrightarrow{\psi} \mathbf{M}_g^{\text{loc}}$$

où φ et ψ seront des morphismes lisses et surjectifs, *via* lesquels $\mathcal{S}(g, p)$ sera isomorphe à $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ localement pour la topologie étale (i.e. il existe un recouvrement étale $V \rightarrow \mathcal{S}(g, p)$ et une section $s : V \rightarrow \mathcal{T}(g, p)$ de φ sur V tels que $\psi \circ s : V \rightarrow \mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ soit étale). Cela ramène l'étude des propriétés de $\mathcal{S}(g, p)$ locales pour la topologie étale (comme la platitude en p) à celle de $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$.

On introduit pour cela la notion suivante. On appelle *chaîne polarisée* (M_\bullet, q_0, q_g) sur un schéma S la donnée d'une suite $M_\bullet = (M_g \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} M_0)$ de faisceaux de \mathcal{O}_S -modules localement libres de rang $2g$ et d'accouplements alternés non-dégénérés q_0 et q_g sur M_0 et M_g tels que, pour tout i , $\text{Coker}(M_i \rightarrow M_{i+1})$ est un $\mathcal{O}_S/p\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1, et vérifiant que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_g & \xrightarrow{\alpha} & \cdots & \xrightarrow{\alpha} & M_0 \\ q_g \downarrow & & & & \downarrow pq_0 \\ M_g^\vee & \xleftarrow{\alpha^\vee} & \cdots & \xleftarrow{\alpha^\vee} & M_0^\vee \end{array}$$

(La catégorie des chaînes polarisées est une catégorie fibrée en groupoïdes sur la catégorie des schémas). On dispose sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ de la chaîne polarisée «standard» (V_\bullet, q_0, q_g) , avec V_i le \mathbf{Z} module libre \mathbf{Z}^{2g} de base (e_0, \dots, e_{2g-1}) , q_0 et q_g donnés par la matrice symplectique standard \tilde{I} , et $\alpha : V_{i+1} \rightarrow V_i$ tel que $\alpha(e_i) = pe_i$ et $\alpha(e_j) = e_j$ pour $j \neq i$. De Jong montre alors par un calcul fastidieux mais élémentaire que si S est le spectre d'un anneau local, toute chaîne polarisée sur S est isomorphe à $V_\bullet \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S$. En particulier, si S est un schéma quelconque, une chaîne polarisée sur S est localement isomorphe à $V_\bullet \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S$.

Considérons alors un point $(A_\bullet, \lambda_0, \lambda_g)$ de $\mathcal{S}(g, p)$ sur un schéma S , et introduisons les faisceaux de cohomologie de de Rham :

$$M_i = \mathcal{H}_{\text{DR}}^1(A_i/S) = R^1 a_* (\Omega_{A_i/S}^\bullet) \quad \text{où } a : A_i \rightarrow S \text{ est le morphisme structural}$$

Ce sont des faisceaux localement libres de rang $2 \dim(A_i/S) = 2g$, qui s'insèrent par functorialité dans une suite $M_g \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} M_0$, avec $\text{Coker}(M_{i+1} \rightarrow M_i)$ un $\mathcal{O}_S/p\mathcal{O}_S$ -module libre de rang 1. Comme en outre on a un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_{\text{DR}}^1(A_i/S)^\vee \cong \mathcal{H}_{\text{DR}}^1(\widehat{A}_i/S)$, les polarisations λ_0 et λ_g déterminent des accouplements alternés non-dégénérés q_0 et q_g sur M_0 et M_g , qui font commuter le bon diagramme. En somme, les M_i forment une chaîne polarisée sur S .

On peut donc définir le champ $\mathcal{S}(g, p)$ représentant le problème de modules suivant : pour un schéma S , l'ensemble des familles $(A_\bullet, \lambda_0, \lambda_g, v)$, où $(A_\bullet, \lambda_0, \lambda_g)$

est dans $\mathcal{S}(g, p)(S)$ et $v : V_\bullet \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S \rightarrow M_\bullet$ est un isomorphisme local de chaînes polarisées. L'oubli de v fournit un morphisme $\varphi : \mathcal{T}(g, p) \rightarrow \mathcal{S}(g, p)$ qui est clairement surjectif. De plus, $\mathcal{T}(g, p)$ est un toreur au-dessus de $\mathcal{S}(g, p)$ sous le groupe \mathcal{S} des automorphismes de la chaîne polarisée standard V_\bullet , qui est un schéma en groupes affine lisse sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, et tel que $\mathcal{S}(\mathbf{Z}_p)$ est précisément le sous-groupe de Iwahori standard de $\text{Sp}(2g, \mathbf{Z}_p)$. Comme toreur sous un groupe lisse, $\mathcal{T}(g, p)$ est en particulier lisse sur $\mathcal{S}(g, p)$: on a ainsi construit le morphisme φ que l'on souhaitait.

Venons-en à présent à $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$. On remarque d'abord que si $(A_\bullet, \lambda_0, \lambda_g)$ est dans $\mathcal{S}(g, p)(S)$, les faisceaux de cohomologie de de Rham M_i sont munis de la filtration de Hodge :

$$0 \subset \omega_{A_i} \subset M_i$$

où (par exemple par dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge-de Rham) $\omega_{A_i} = R^0 a_* \Omega_{A_i/S}^1$ est un sous- \mathcal{O}_S -module de M_i localement facteur direct de rang g . De plus, $\alpha(\omega_{A_{i+1}}) = a_* \alpha^* \Omega_{A_{i+1}/S}^1$ est contenu dans ω_i pour tout i . Il résulte en outre de la théorie de Dieudonné que ω_{A_0} et ω_{A_g} sont (totalement) isotropes pour les accouplements symplectiques q_0 et q_g de M_0 et M_g .

Définissons alors $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ comme représentant le problème de modules qui à un schéma S associe l'ensemble des $(g+1)$ -uplets $(\omega_0, \dots, \omega_g)$, avec ω_i sous- \mathcal{O}_S -module de $V_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S$ localement facteur direct de rang g , vérifiant $\alpha(\omega_{i+1}) \subset \omega_i$ et ω_0 et ω_g isotropes. Cette définition fait apparaître $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ comme fermé du produit de grassmanniennes $\prod_i \text{Grass}(g, V_i)$, et donc en particulier comme schéma projectif sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$. D'après l'observation qui précède, on peut définir un morphisme $\psi : \mathcal{T}(g, p) \rightarrow \mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ qui, sur un schéma S , associe à $(A_\bullet, \lambda_0, \lambda_g, v)$ le $(g+1)$ -uplet des $\omega_i = v^{-1}(\omega_{A_i}) \subset V_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S$. En utilisant la théorie de Grothendieck-Messing des déformations des variétés abéliennes, de Jong montre en outre que ψ est lisse, et en déduit le résultat annoncé plus haut que $\mathcal{S}(g, p)$ est isomorphe à $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ localement pour la topologie étale. Plus précisément :

Théorème 1 (de Jong). *Soit $s : \text{Spec } k \rightarrow \mathcal{S}(g, p)$ un point géométrique et $t : \text{Spec } k \rightarrow \mathcal{T}(g, p)$ un point géométrique quelconque de $\mathcal{T}(g, p)$ au-dessus de s . Alors les points s et $\psi(t)$ ont des voisinages étales isomorphes.*

Le résultat vaut sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ (dans les cas plus généraux traités par Rapoport et Zink, les modèles locaux sont définis seulement sur \mathbf{Z}_p). Sur \mathbf{Z}_p , on a le résultat supplémentaire, mentionné par Genestier, que la flèche ψ est surjective, de sorte que les espaces $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ et $\mathcal{S}(g, p)$ sont localement \mathbf{Z}_p -isomorphes l'un à l'autre.

Remarquons que ce résultat fournit déjà bon nombre de renseignements sur la géométrie de $\mathcal{S}(g, p)$. Par exemple pour $g = 1$, $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ est le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ défini par les couples de droites $(\omega_0, \omega_1) \subset \mathbf{A}^2 \times \mathbf{A}^2$ avec $\omega_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \omega_0$. En donnant des générateurs de ω_0 et ω_1 respectivement comme $(x, 1)$ et $(1, y)$, on voit que $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ a une équation locale de la forme $xy = p$, i.e. est localement isomorphe à $\text{Spec } \mathbf{Z}[X, Y]/(XY - p)$, qui se réduit en p comme de deux droites s'intersectant transversalement. On voit plus généralement que $(\mathbf{M}_g^{\text{loc}})_{\mathbf{F}_p}$ est l'intersection de deux copies de \mathbf{P}^1 se coupant transversalement en

un point. En particulier, on retrouve le résultat classique de Deligne-Rapoport selon lequel $Y_0(p)$ a réduction semi-stable en p .

De Jong écrit de même des équations pour le modèle local dans le cas où $g = 2$, et sait alors décrire les singularités qui interviennent. Il en déduit en particulier que $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$, et donc $\mathcal{S}(g, p)$, est localement intersection complète pour $g = 2$ (mais ce n'est plus le cas pour $g \geq 3$). De plus, il donne dans ce cas un éclatement explicite de $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ après lequel ce modèle devient semi-stable, ce qui permet, comme on va le voir, d'obtenir une résolution semi-stable de $\mathcal{S}(g, p)$.

Enfin, signalons que la conjecture formulée par Rapoport et Zink selon laquelle $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ serait plat sur \mathbf{Z}_p a été récemment démontrée par Görtz. En particulier, $\mathcal{S}(g, p)$ est également plat sur \mathbf{Z}_p . (Il est en revanche faux en général que les modèles locaux de Rapoport-Zink pour une variété de Shimura de type PEL plus générale soient plats).

4 Vers une résolution semi-stable

Soit G le \mathbf{Z}_p -schéma en groupes $\text{Sp}(V_0 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p)$. On note P et B les sous-schémas en groupes qui stabilisent respectivement le sous-module totalement isotrope maximal $[e_g, \dots, e_{2g-1}]$ et le drapeau isotrope $[e_{2g-1}] \subset [e_{2g-2}, e_{2g-1}] \subset \dots \subset [e_g, \dots, e_{2g-1}]$. B est simplement le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures.

Considérons alors la grassmannienne \mathcal{L}_g des sous-modules «lagrangiens» de $V_0 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$, qui paramétrise, sur un \mathbf{Z}_p -schéma S , les sous- \mathcal{O}_S -modules de $V_0 \otimes \mathcal{O}_S$ isotropes et localement facteurs directs de rang g . C'est un schéma lisse de dimension relative $g(g+1)/2$ sur \mathbf{Z}_p , muni d'une action localement transitive évidente du groupe G . Le stabilisateur du point $[e_g, \dots, e_{2g-1}]$ étant précisément P , \mathcal{L}_g peut se voir comme le quotient G/P .

Le morphisme $\text{pr}_0 : \mathbf{M}_g^{\text{loc}} \rightarrow \mathcal{L}_g$ obtenu par projection sur le premier facteur est alors \mathcal{I} -équivariant, \mathcal{I} agissant sur \mathcal{L}_g via le morphisme $\mathcal{I} \rightarrow G$. Genestier construit par ailleurs une suite d'éclatements (le long de sous-schémas fermés stables par \mathcal{I} et) également \mathcal{I} -équivariants :

$$\widetilde{\mathcal{L}}_g = \mathcal{L}_g^{(N)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{L}_g^{(1)} \longrightarrow \mathcal{L}_g^{(0)} \longrightarrow \mathcal{L}_g$$

Notons $\text{pr} : \widetilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathcal{L}_g$ la composée de ces éclatements. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2 (Genestier). *Supposons $g \leq 3$. Alors le \mathbf{Z}_p -schéma $\widetilde{\mathcal{L}}_g$ est semi-stable, et il existe un unique morphisme $R : \widetilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathbf{M}_g^{\text{loc}}$ qui rende commutatif le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{L}}_g & \xrightarrow{R} & \mathbf{M}_g^{\text{loc}} \\ & \searrow \text{pr} & \swarrow \text{pr}_0 \\ & \mathcal{L}_g & \end{array}$$

morphisme qui est de plus propre et \mathcal{I} -équivariant.

Pour $g = 1$, le morphisme ainsi obtenu est un isomorphisme, et pour $g = 2$, on retrouve la résolution semi-stable construite par de Jong évoquée plus haut.

Montrons comment, à partir de cette résolution de $\mathbf{M}_g^{\text{loc}}$, on obtient en fait une résolution de $\mathcal{S}(g, p)$. On forme le produit fibré $\widetilde{\mathcal{T}}(g, p) = \mathcal{T}(g, p) \times_{\mathbf{M}_g^{\text{loc}}} \widetilde{\mathcal{L}}_g$. Comme la flèche φ de changement de base est lisse, $\widetilde{\mathcal{T}}(g, p)$ est une résolution semi-stable de $\mathcal{T}(g, p)$, qui est encore \mathcal{I} -équivariante. Or \mathcal{I} agit librement sur $\mathcal{T}(g, p)$, donc *a fortiori* sur $\widetilde{\mathcal{T}}(g, p)$. On peut donc considérer le quotient $\widetilde{\mathcal{S}}(g, p) = \widetilde{\mathcal{T}}(g, p) / \mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{\mathcal{S}}(g, p) & \longleftarrow & \widetilde{\mathcal{T}}(g, p) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{L}}_g \\
 \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow R \\
 \mathcal{S}(g, p) & \xleftarrow{\text{pr}_0} & \mathcal{T}(g, p) & \xrightarrow{f} & \mathbf{M}_g^{\text{loc}}
 \end{array}$$

Il vient alors :

Théorème 3. *Localement pour la topologie étale, $\widetilde{\mathcal{S}}(g, p)$ est \mathbf{Z}_p isomorphe à $\widetilde{\mathcal{L}}_g$. En particulier, $\widetilde{\mathcal{S}}(g, p)$ est semi-stable, le morphisme $\widetilde{\mathcal{S}}(g, p) \rightarrow \mathcal{S}(g, p)$ est une résolution semi-stable.*

Références

- [1] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline, ii*, Lecture notes in Math., vol. 930, Springer-Verlag, 1982.
- [2] H. Carayol, *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura*, Compositio Math. **59** (1986), 151–230.
- [3] A. J. de Jong, *The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with $\Gamma_0(p)$ -level structure*, J. Alg. Geom. **2** (1993), 667–688.
- [4] P. Deligne and M. Rapoport, *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, Lecture Notes in Math. **349** (1973), 143–316.
- [5] A. Genestier, *Un modèle semi-stable de la variété de Siegel de genre 3 avec structure de niveau $\Gamma_0(p)$* , Compositio Math. **123** (2000), no. 3, 303–328.
- [6] A. Genestier and B. C. Ngô, *Lectures on Shimura varieties*, Notes from a series of lectures at IHÉS, 2006.
- [7] U. Görtz, *On the flatness of local models for the symplectic group*, Adv. Math. **176** (2003), no. 1, 89–115.
- [8] T. J. Haines, *Introduction to Shimura varieties with bad reduction of parahoric type*, Harmonic analysis, the trace formula and Shimura varieties (J. Arthur, D. Ellwood, and R. Kottwitz, eds.), 1997, pp. 209–242.
- [9] N. M. Katz and B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Ann. Math. Studies, vol. 108, Princeton University Press, 1985.

- [10] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 34, Springer-Verlag, 1982.
- [11] M. Rapoport, *A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties*, Astérisque **298** (2005), 271–318.
- [12] M. Rapoport and T. Zink, *Period spaces for p -divisible groups*, Ann. Math. Studies, vol. 141, Princeton University Press, 1996.